

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE ÉMILE PICARD
(UMR UPS-CNRS 5580)
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
TOULOUSE 3

**DIPLÔME D'HABILITATION À DIRIGER DES
RECHERCHES**

Disques de Siegel
&
Ensembles de Julia d'aire strictement positive

XAVIER BUFF
Maître de conférences UPS

Le 6 novembre 2006

François Berteloot (Professeur Toulouse 3)	examineur
Adrien Douady (Professeur émérite ENS Paris)	examineur
Julien Duval (Professeur Toulouse 3)	directeur des recherches
Etienne Ghys (Directeur de Recherche ENS Lyon)	rapporteur
John H. Hubbard (Professeur Cornell USA & CMI Marseille)	président
Michael Lyubich (Professeur SUNY)	examineur
Curtis T. McMullen (Professeur Harvard)	rapporteur
Mitsuhiro Shishikura (Professeur Kyoto Japon)	examineur
Jean-Christophe Yoccoz (Professeur Collège de France)	rapporteur

À Adrien

Remerciements

Beaucoup de personnes ont joué un rôle important dans ma vie mathématique. C'est grâce à elles que ce texte a vu le jour. Qu'elles en soient remerciées.

Je tiens tout particulièrement à saluer ici Arnaud Chéritat qui est présent à chaque page. Je le remercie pour son amitié, sa générosité, sa patience, son humour et pour l'immense plaisir que j'ai à travailler avec lui.

Un grand merci à mes deux mentors et amis, Adrien Douady et Hamal Hubbard. Adrien a guidé mes premiers pas de chercheur et a ouvert la voie d'une très belle aventure. Hamal m'a fait découvrir le royaume des petits diviseurs, de la théorie de Teichmüller, des théorèmes de Thurston, et bien d'autres encore.

Merci à François Berteloot, Julien Duval, Etienne Ghys, Misha Lyubich, Curtis T. McMullen, Mitsuhiro Shishikura et Jean-Christophe Yoccoz de l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury de mon habilitation. Je leur suis reconnaissant pour les échanges que nous avons eus, l'inspiration qu'ils m'ont insufflée et le soutien qu'ils m'ont témoigné.

Je réserve une place particulière à ceux et celles aux côtés de qui je grandis, qui sont des interlocuteurs attentifs, qui m'ont toujours prodigué d'excellents conseils. Je pense en particulier à André Antibi, Artur Avila, Adam Epstein, Nuria Fagella, Marguerite Flexor, Vincent Guedj, Peter Haisinsky, Christian Henriksen, Gilbert Levitt, Jean-François Mattei, Ricardo Pérez-Marco, Jack Milnor, Yveline Panabière, Pierrette Sentenac, Laurent Stolovitch, Tan Lei, Misha Yampolsky, Saeed Zakeri et Michel Zinsmeister.

Je voudrais remercier Régine Douady, Barbara Hubbard ainsi que Valérie Chéritat qui m'ont toujours accueilli chez elles comme un membre de la famille.

Je suis infiniment reconnaissant à ma famille, Bernadette et Michel, Danièle et Bernard, Vanessa et Samuel, les copains normaliens, qui me soutiennent et m'encouragent dans ma passion des mathématiques.

Tout mon amour va à celles sans qui je ne serais pas celui que je suis, Florence, Juliette et Morgane.

Table des matières

1	Résultats obtenus sans arithmétique	7
1.1	Préliminaires	7
1.2	Existence de points de Cremer	11
1.3	Existence de disques de Siegel	12
1.4	Quelques propriétés de la fonction $\alpha \mapsto r(P_\alpha)$	14
1.5	Disques de Siegel à bord \mathcal{C}^∞	22
1.6	Le contrôle de l'explosion parabolique	24
2	La fonction de Brjuno-Yoccoz	32
2.1	Rappels sur les fractions continues	32
2.2	La condition de Brjuno	33
2.3	Minoration de $r(f)$ pour $f \in \mathcal{S}_\alpha$	34
2.4	Majoration de $r(P_\alpha)$	52
2.5	La fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$	59
3	Ensembles de Julia d'aire strictement positive	64
3.1	Disques de Siegel introvertis	64
3.2	Contrôle d'ensembles postcritiques	74
3.3	Ensembles de Julia d'aire strictement positive	81
4	Perspectives	88
4.1	Conjugaisons \mathcal{C}^∞	88
4.2	Rayon conforme des disques de Siegel	89
4.3	Ensembles de Julia d'aire strictement positive	91

Introduction

Dans ce manuscrit nous étudions la dynamique d'applications holomorphes de la forme :

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{C}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) && \text{avec } \alpha \in \mathbb{C}. \\ z &\longmapsto e^{2i\pi\alpha}z + \mathcal{O}(z^2) \end{aligned}$$

La famille des polynômes quadratiques

$$P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z(1+z)$$

joue un rôle central.

On dit que l'application f est *linéarisable* si elle est conjuguée à sa partie linéaire $R_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z$ au voisinage de l'origine : il existe une application $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ univalente au voisinage de 0 telle que $\varphi \circ R_\alpha = f \circ \varphi$.

Si $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, l'application f n'est linéarisable que si le $q^{\text{ème}}$ itéré $f^{\circ q}$ est égal à l'identité au voisinage de 0. Ce n'est généralement pas le cas. En particulier, ce n'est jamais le cas si f est une fraction rationnelle de degré ≥ 2 .

Dans tous les autres cas ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$), l'application f est formellement linéarisable : il existe une série formelle $\varphi(z) = z + \mathcal{O}(z^2)$ telle que $\varphi \circ R_\alpha = f \circ \varphi$. On appelle $r(f) \in [0, +\infty]$ le rayon de convergence de cette série. Si $r(f) = 0$, l'application n'est pas linéarisable. Si $r(f) > 0$, l'application est linéarisable. Quand α n'est pas réel (soit $|e^{2i\pi\alpha}| < 1$ et l'origine est un point fixe attractif, soit $|e^{2i\pi\alpha}| > 1$ et l'origine est un point fixe répulsif), $r(f) > 0$ et l'application est linéarisable.

Notre étude porte principalement sur le cas $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La partie linéaire de f est alors une rotation irrationnelle. Si f est linéarisable, les orbites des points proches de 0 s'accumulent sur des cercles \mathbb{R} -analytiques invariants. Le domaine maximal sur lequel f est conjuguée à la rotation R_α est le disque de Siegel $\Delta(f)$. Si f n'est pas linéarisable, on dit que 0 est un point de Cremer.

Dans le premier chapitre de ce manuscrit, nous présentons des résultats dont la démonstration ne repose pas sur les propriétés arithmétiques fines du

nombre de rotation α . En particulier, nous présentons une démonstration relativement élémentaire du résultat suivant : si $f(z) = e^{2i\pi\alpha}z + O(z^2)$ est univalente dans le disque unité, alors $r(f) \geq r(P_\alpha)/20$. De plus, nous montrons l'existence de polynômes quadratiques ayant un disque de Siegel dont le bord est une courbe de Jordan de classe C^∞ . Nous présentons une démonstration obtenue en collaboration avec Artur Avila et Arnaud Chéritat [ABC] et simplifiée par Lukas Geyer [G]. Nous concluons le chapitre par l'étude de ce qu'Arnaud Chéritat appelle "le contrôle de l'explosion parabolique".

Dans le deuxième chapitre, nous expliquons comment on peut contrôler $r(f)$ à l'aide de la fonction de Brjuno-Yoccoz :

$$\Phi(\alpha) := \sum_{n=-1}^{+\infty} \alpha_0 \cdots \alpha_n \log \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

où $\alpha_0 := \{\alpha\}$ est la partie fractionnaire de α et $\alpha_{n+1} = \{1/\alpha_n\}$. Raffinant une démonstration de Carl L. Siegel, Alexander Brjuno a montré que si $\Phi(\alpha) < +\infty$ toute application holomorphe $f(z) = e^{2i\pi\alpha}z + O(z^2)$ est linéarisable. Jean-Christophe Yoccoz a montré qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute application $f : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z + O(z^2)$ univalente dans le disque unité, on a la minoration $r(f) \geq Ce^{-\Phi(\alpha)}$. Il a également démontré qu'il existe une constante C' telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une application $f : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z + O(z^2)$ univalente dans le disque unité avec $r(f) \leq C'e^{-\Phi(\alpha)}$. En combinant ce résultat avec ceux du premier chapitre, nous voyons que la fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$ (qui est bien définie dès que $\Phi(\alpha) < +\infty$) est une fonction bornée. Avec Arnaud Chéritat, nous avons montré que cette fonction est uniformément continue. Dans le deuxième chapitre, nous présentons les grandes lignes de la démonstration.

Dans le troisième chapitre, nous expliquons comment le contrôle de la géométrie des disques de Siegel intervient dans la démonstration de l'existence de polynômes quadratiques P_α ayant un ensemble de Julia d'aire (mesure de Lebesgue) strictement positive. Ce résultat a été obtenu en collaboration avec Arnaud Chéritat.

Chapitre 1

Résultats obtenus sans arithmétique

Ce chapitre est l'occasion de rappeler des résultats connus concernant la linéarisation des applications holomorphes qui fixent 0 et d'en compléter certains.

1.1 Préliminaires

Définition 1

L'ensemble \mathcal{O}_α est l'ensemble des germes $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ qui fixent 0 avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$. L'ensemble $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{O}_\alpha$ est l'ensemble des applications univalentes $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ qui fixent 0 avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$.

Proposition 1

Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, toute application $f \in \mathcal{O}_\alpha$ est formellement linéarisable : il existe une unique série formelle $\varphi(z) = z + b_2z^2 + b_3z^3 + \dots$ telle que $\varphi \circ R_\alpha = f \circ \varphi$.

Démonstration. Posons $\lambda = e^{2i\pi\alpha}$, écrivons

$$f(z) = \lambda z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots,$$

et supposons déterminés b_2, \dots, b_{k-1} . Les termes de degré k de l'équation $\varphi(\lambda z) = f(\varphi(z))$ donnent

$$\lambda^k b_k = \lambda b_k + P_k(a_2, \dots, a_k, b_2, \dots, b_{k-1})$$

avec P_k un polynôme qui ne dépend pas de λ . Par hypothèse, $\lambda^k - \lambda$ ne s'annule pas, et il y a une unique solution :

$$b_k := \frac{P_k(a_2, \dots, a_k, b_2, \dots, b_{k-1})}{\lambda^k - \lambda}.$$

□

Le problème essentiel consiste à déterminer si cette série formelle a un rayon de convergence strictement positif. Notons que si α est fixé, les coefficients b_k de la linéarisante dépendent polynomialement des coefficients de $f \in \mathcal{O}_\alpha$.

Définition 2

Si $f \in \mathcal{O}_\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $r(f)$ est le rayon de convergence de l'unique série formelle $\varphi(z) = z + O(z^2)$ qui conjugue la similitude R_α à f .

Chaque fois que nous utiliserons la notation φ , ce sera pour désigner une telle linéarisante. Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, nous ne préciserons pas de quelle linéarisante il s'agit.

Théorème 2

Si f a un point fixe attractif en 0, alors f est linéarisable.

Démonstration. Soit $\lambda := f'(0)$. La suite $\psi_n := \frac{1}{\lambda^n} f^{\circ n}$ converge uniformément dans un voisinage de 0. La limite est holomorphe fixe 0 avec dérivée 1 et satisfait $\psi \circ f = \lambda\psi$. □

Théorème 3

Si f a un point fixe répulsif en 0, alors f est linéarisable.

Démonstration. L'application $f^{-1} : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a un point fixe attractif en 0. Une application qui linéarise f^{-1} linéarise f . □

Théorème 4

Si $f'(0) = e^{2i\pi p/q}$, alors f est linéarisable si, et seulement si, $f^{\circ q} = \text{Id}$.

Démonstration. Si f est conjuguée à la rotation $R_{p/q}$, alors $f^{\circ q}$ est conjuguée à $R_{p/q}^{\circ q} = \text{Id}$. La seule application conjuguée à l'identité est l'identité elle-même. Par conséquent, $f^{\circ q} = \text{Id}$.

Si $f^{\circ q} = \text{Id}$, l'application $\psi := \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{(e^{2i\pi p/q})^k} f^{\circ k}$ linéarise f au voisinage de l'origine : $\psi \circ f = R_{p/q} \circ \psi$. \square

Corollaire 5

Si $f : z \mapsto e^{2i\pi p/q} z + O(z^2)$ est une fraction rationnelle de degré ≥ 2 , f n'est pas linéarisable.

Démonstration. La fraction rationnelle $f^{\circ q}$ est une fraction rationnelle de degré d^q . Elle ne peut pas être égale à l'identité dans un voisinage de 0 car sinon, elle serait égale à l'identité partout et son degré serait égal à 1. \square

Venons-en maintenant au cas indifférent irrationnel, c'est-à-dire $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Définition 3

La dynamique de f est *stable* au voisinage de 0, s'il existe $R > r > 0$ tels que les itérés $f^{\circ n}|_{D_r}$ sont définis pour tout $n \geq 0$ avec $f^{\circ n}(D_r) \subset D_R$.

Théorème 6

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $f \in \mathcal{O}_\alpha$, alors f est linéarisable si, et seulement si, la dynamique de f est stable au voisinage de 0.

Démonstration. Si f est linéarisable, pour r suffisamment petit, $\varphi(D_r)$ est un ensemble invariant par f . La dynamique est donc stable au voisinage de 0.

Pour la réciproque, il existe (au moins) deux preuves.

1. Si la dynamique de f au voisinage de 0 est stable, les applications $\psi_n : D_r \rightarrow D_R$ définies par

$$\psi_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(e^{2i\pi\alpha})^k} f^{\circ k}$$

forment une famille normale. Toute valeur d'adhérence ψ linéarise f au voisinage de 0 : $\psi \circ f(z) = R_\alpha \circ \psi(z)$ dès que z et $f(z)$ appartiennent à D_r .

2. Soit K l'ensemble des points $z \in D_R$ tels que $f^{on}(z) \in D_R$ pour tout $n \geq 0$. Par le principe du maximum, la composante V de l'intérieur de K qui contient D_r est simplement connexe.

Soit $\psi : \mathbb{D} \rightarrow V$ une représentation conforme qui envoie 0 sur 0. L'application $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ est holomorphe dans \mathbb{D} , et envoie \mathbb{D} dans lui-même. Elle fixe 0 avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$, qui est de module 1. D'après le lemme de Schwarz,

$$\psi \circ f = R_\alpha \circ \psi.$$

□

Exemples. Dans le cas du polynôme quadratique $P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z(1+z)$, on définit l'ensemble de Julia rempli

$$K(P_\alpha) := \{z \in \mathbb{C} ; \text{la suite } P_\alpha^{on}(z) \text{ est bornée}\}.$$

1. Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$, le théorème 6 page précédente et sa démonstration (deuxième démonstration) impliquent que P_α est linéarisable si et seulement si $0 \in \overset{\circ}{K}(P_\alpha)$. Dans ce cas la composante connexe de $\overset{\circ}{K}(P_\alpha)$ qui contient 0 est le disque de Siegel $\Delta(P_\alpha)$.

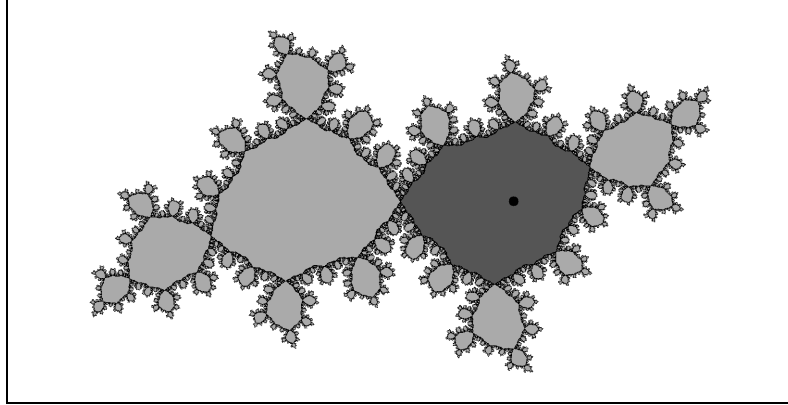


FIG. 1.1 – L'ensemble de Julia rempli du polynôme $P_{\sqrt{2}}$. Il y a un disque de Siegel (en gris foncé).

2. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, le polynôme $P_{p/q}$ n'est pas linéarisable. L'origine est dans le bord de l'ensemble de Julia rempli. C'est par exemple le cas si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Plus généralement, si un polynôme P de degré ≥ 2 qui fixe 0 avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$ est linéarisable, alors 0 appartient à l'intérieur de l'ensemble de Julia rempli $K(P)$. La composante connexe de l'intérieur qui contient

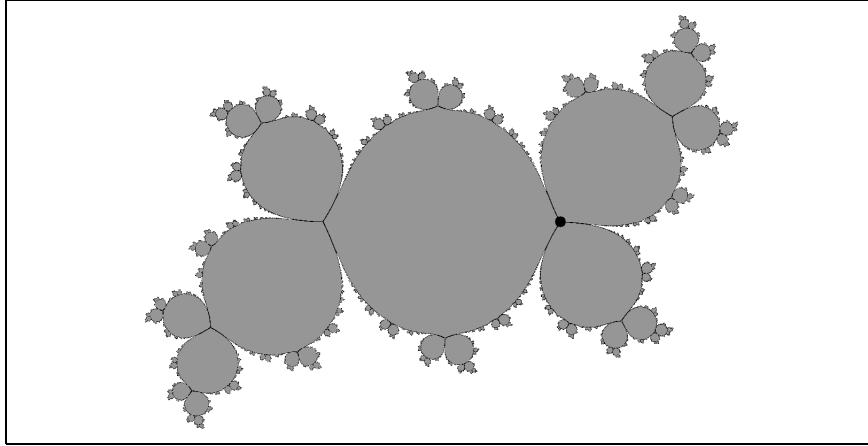


FIG. 1.2 – L'ensemble de Julia rempli du polynôme $P_{2/3}$ qui n'est pas linéarisable. L'origine est dans le bord de l'ensemble de Julia rempli.

0 est alors le disque de Siegel Δ_P . Dans ce cas, si $\chi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta_P$ est la représentation conforme qui fixe 0 avec dérivée réelle et positive,

$$r(P) = \chi'(0) \quad \text{et} \quad (\forall z \in \mathbb{D}) \quad \chi(z) = \varphi(r(P) \cdot z).$$

Nous dirons que $r(P)$ est le *rayon conforme* du disque de Siegel Δ_P .

1.2 Existence de points de Cremer

Il est facile de montrer qu'il existe des fonctions $f \in \mathcal{O}_\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui ne sont pas linéarisables. On peut par exemple utiliser le théorème de Baire.

Définition 4

Une application $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a des *petits cycles* si pour tout $r > 0$, il y a une orbite périodique $\langle z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots \mapsto z_n \mapsto z_0 \rangle$ contenue dans $D_r \setminus \{0\}$.

Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, une application $f \in \mathcal{O}_\alpha$ qui a des petits cycles ne peut pas être linéarisable.

Théorème 7 (Cremer)

Soit $f_0(z) = z + O(z^2)$ une fraction rationnelle de degré ≥ 2 . Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha := e^{2i\pi\alpha} \cdot f_0$. Alors, l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que f_α a des petits cycles est un ensemble gras au sens de Baire.

Démonstration. Si $\alpha_0 = p/q$, l'application $f_{\alpha_0}^{q}$ a un point fixe multiple

en 0. Si α est suffisamment proche de α_0 , l'application $f_\alpha^{\circ q}$ a autant de points fixes (en comptant les multiplicités) au voisinage de 0. En 0, le point fixe est simple dès lors que $q\alpha \neq 0 \pmod{1}$. Un point fixe pour $f_\alpha^{\circ q}$ est un point périodique de période inférieure ou égale à q pour f_α . Si ce point est suffisamment proche de 0, son orbite est proche de 0. Il s'en suit que pour tout $r > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $0 < |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, l'application f_α a un cycle contenu dans $D_r \setminus \{0\}$.

Par conséquent, pour tout $n > 0$, l'ensemble U_n des $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que f_α a un cycle dans $D_{1/n} \setminus \{0\}$ contient un ouvert dense dans \mathbb{R} . L'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pour lesquels f_α a des petits cycles est l'intersection décroissante des ensembles U_n . C'est un ensemble gras au sens de Baire. \square

Dans sa thèse, Arnaud Chéritat a montré que dans le cas de la famille des polynômes quadratiques, cette démonstration peut être quantifiée. Nous en reparlerons plus loin.

1.3 Existence de disques de Siegel

En 1942, Carl L. Siegel est le premier à montrer qu'il existe un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ de mesure totale tel que si $\alpha \in \mathcal{D}$, toute application $f \in \mathcal{O}_\alpha$ est linéarisable. Jean-Christophe Yoccoz [Y] a donné une démonstration de ce résultat qui repose sur des arguments relativement simples. Il commence par montrer qu'il existe un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ de mesure totale tel que si $\alpha \in \mathcal{D}$, le polynôme quadratique $P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z(1+z)$ est linéarisable. Il montre ensuite que si P_α est linéarisable, toute application $f \in \mathcal{O}_\alpha$ est linéarisable. Nous présentons ici ces deux résultats.

1.3.1 Linéarisabilité de P_α pour presque tout α

Théorème 8

Pour presque tout $\lambda \in S^1$, le polynôme quadratique $Q_\lambda : z \mapsto \lambda z(1+z)$ est linéarisable.

Démonstration. Définissons $u : \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ par

- $u(0) := -\log 4$,
- $u(\lambda) := \log r(Q_\lambda)$ si $\lambda \neq 0$.

Lemme 9

La fonction u est harmonique et majorée par $\log 2$ dans \mathbb{D} .

Démonstration. Pour $\lambda \in \mathbb{D}^*$, la fonction

$$\psi_\lambda(z) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^n} Q_\lambda^{on}(z)$$

est holomorphe dans le bassin attractif Ω_λ de 0. Elle fixe 0 avec dérivée 1. Elle conjugue Q_λ à la similitude $z \mapsto \lambda z$. L'application $\psi_\lambda : \Omega_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ est un revêtement, ramifié au point critique $-1/2$ et en toutes ses préimages. En particulier, c'est un revêtement au dessus du disque de rayon $|\psi_\lambda(-1/2)|$. La branche inverse qui fixe 0 est l'application φ_λ , qui fixe 0 avec dérivée 1 et conjugue la similitude de rapport λ à Q_λ . On ne peut pas la prolonger à un disque de rayon plus grand car il y a une singularité en $\psi_\lambda(-1/2)$. Donc,

$$r(Q_\lambda) = |U(\lambda)| \quad \text{avec} \quad U(\lambda) := \psi_\lambda(-1/2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^n} Q_\lambda^{on}(-1/2).$$

La convergence est uniforme sur tout compact de \mathbb{D}^* , ce qui montre que U est holomorphe sur \mathbb{D}^* . On vérifie que $U(0) = 1/4$. Par conséquent, u est harmonique dans \mathbb{D} .

Si $|z| > 2$, $|Q_\lambda(z)| > |z|$ et donc φ_λ est une fonction univalente $D_{r(Q_\lambda)} \rightarrow D_2$ qui fixe 0 avec dérivée 1. D'après le lemme de Schwarz, $r(Q_\lambda) \leq 2$. Donc, $u(\lambda) \leq \log 2$. \square

On a donc

$$(\forall t \in]0,1[) \quad u(0) = -\log 4 = \int_0^1 u(te^{2i\pi\alpha}) d\alpha.$$

Posons

$$\rho(\lambda) := \limsup_{t \in]0,1[\rightarrow 1} r(Q_{t\lambda}).$$

Comme u est majorée, d'après le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} -\log 4 &= \limsup_{t \in]0,1[\rightarrow 1} \int_0^1 u(te^{2i\pi\alpha}) d\alpha \\ &\leq \int_0^1 \limsup_{t \in]0,1[\rightarrow 1} u(te^{2i\pi\alpha}) d\alpha = \int_0^1 \log \rho(e^{2i\pi\alpha}) d\alpha. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour presque tout $\alpha \in [0,1]$, $\log \rho(e^{2i\pi\alpha}) > -\infty$ et donc, pour presque tout $\lambda \in S^1$, $\rho(\lambda) > 0$.

Lemme 10

Pour $\lambda \in S^1$, on a

$$r(Q_\lambda) \geq \rho(\lambda).$$

Démonstration. On choisit $\rho \in]0, \rho(\lambda)[$ et $t_n \in]0, 1[\rightarrow 1$ de sorte que $r_n := r(Q_{t_n \lambda}) > \rho$. On pose $\lambda_n := t_n \lambda$. Les fonctions $\varphi_{\lambda_n} : D_{r_n} \rightarrow D_2$ forment une famille normale et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite φ_{λ_n} converge vers une limite $\varphi : D_\rho \rightarrow D_2$. Par passage à la limite sur les égalités $\varphi_{\lambda_n}(0) = 0$, $\varphi'_{\lambda_n}(0) = 1$ et $\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n z) = Q_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}(z))$, on voit que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et $\varphi(\lambda z) = Q_\lambda(\varphi(z))$. Donc l'application φ linéarise Q_λ et $r(Q_\lambda) \geq \rho$. \square

Donc, pour presque tout $\lambda \in S^1$, $r(Q_\lambda) \geq \rho(\lambda) > 0$ et le polynôme Q_λ est linéarisable. \square

1.4 Quelques propriétés de la fonction $\alpha \mapsto r(P_\alpha)$

Le lemme 10 affirme que pour $\lambda \in S^1$, on a

$$r(Q_\lambda) \geq \limsup_{t \in]0, 1[\rightarrow 1} r(Q_{t\lambda}).$$

Jean-Christophe Yoccoz [Y] a montré qu'on a un résultat plus fort.

On dit que $\lambda_n \in \mathbb{D} \rightarrow \lambda_0$ non tangentiellement si $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ dans un secteur contenu dans \mathbb{D} avec sommet en λ_0 .

Théorème 11 (Yoccoz)

Pour tout $\lambda_0 \in S^1$, si $\lambda_n \in \mathbb{D} \rightarrow \lambda_0$ non tangentiellement, $r(Q_{\lambda_n}) \rightarrow r(Q_{\lambda_0})$.

Démonstration. Étant donné le lemme 10, il suffit de montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} r(Q_{\lambda_n}) \geq r(Q_{\lambda_0}).$$

Si Q_{λ_0} n'est pas linéarisable, $r(Q_{\lambda_0}) = 0$ et il n'y a rien à démontrer.

Si Q_{λ_0} est linéarisable, on considère la famille d'applications

$$f_\lambda := \varphi_{\lambda_0}^{-1} \circ Q_\lambda \circ \varphi_{\lambda_0}$$

où $\varphi_{\lambda_0} : D_{r(Q_{\lambda_0})} \rightarrow \Delta(Q_{\lambda_0})$ est l'isomorphisme qui fixe 0 avec dérivée 1 (c'est également la linéarisante).

Pour tout $r < r(Q_{\lambda_0})$, il existe un voisinage Λ de λ_0 tel que l'application

$$(\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$$

est définie et analytique sur $\Lambda \times D_r$. De plus, f_{λ_0} est la rotation $z \mapsto \lambda_0 z$ et si λ est suffisamment proche de λ_0 , l'application f_λ est univalente sur D_r . La démonstration est alors complétée par la proposition 12 ci-dessous. \square

Proposition 12

Soit U un voisinage de $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f : U \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une application analytique telle que pour tout $\alpha \in U$,

- l'application $f_\alpha := f(\alpha, \cdot) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application univalente qui fixe 0 avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$ et
- f_{α_0} est la rotation R_{α_0} .

Alors, pour tout $c > 0$, quand $\alpha \rightarrow \alpha_0$ avec $\text{Im}(\alpha) > c|\alpha - \alpha_0|$,

- $\liminf r(f_\alpha) \geq 1$ et
- $\varphi_\alpha \rightarrow \text{Id}$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} .

Démonstration. Supposons que $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ avec $\text{Im}(\alpha_n) > c|\alpha_n - \alpha_0|$ pour un $c > 0$.

Lemme 13

Pour tout $r < 1$, il existe $k \geq 0$ tel que pour n assez grand, $f_{\alpha_n}^{o k}(D_r) \subset D_r$.

Démonstration. Identifions \mathbb{C}/\mathbb{Z} et \mathbb{C}^* via $Z \mapsto e^{2i\pi Z}$. Définissons

$$\mathbb{H}_r := \{Z \in \mathbb{H} ; |e^{2i\pi Z}| < r\}.$$

Les applications $f_\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ se relèvent en applications $F_\alpha : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$f_\alpha(e^{2i\pi Z}) = e^{2i\pi F_\alpha(Z)} \quad \text{et} \quad \lim_{\text{Im}(Z) \rightarrow +\infty} F_\alpha(Z) - Z = \alpha.$$

Puisque $(\alpha, z) \mapsto F_\alpha(z)$ est analytique, on a

$$F_\alpha(Z) = Z + \alpha_0 + (\alpha - \alpha_0)u_1(Z) + (\alpha - \alpha_0)^2 v_1(\alpha, Z)$$

avec $Z \mapsto u_1(Z)$ et $Z \mapsto v_1(\alpha, Z)$ périodiques de période 1, $v_1(Z, \alpha)$ uniformément bornée sur \mathbb{H}_r quand $\alpha \rightarrow \alpha_0$, et

$$\lim_{\text{Im}(Z) \rightarrow +\infty} u_1(Z) = 1.$$

De même, pour tout $k \geq 1$,

$$F_\alpha^{\circ k}(Z) = Z + k\alpha_0 + (\alpha - \alpha_0)u_k(Z) + (\alpha - \alpha_0)^2v_k(\alpha, Z)$$

avec $Z \mapsto u_k(Z)$ et $Z \mapsto v_k(\alpha, Z)$ périodiques de période 1, $v_k(Z, \alpha)$ uniformément bornée sur \mathbb{H}_r quand $\alpha \rightarrow \alpha_0$, et

$$\lim_{\text{Im}(Z) \rightarrow +\infty} u_k(Z) = k.$$

Nous prétendons que lorsque $k \rightarrow \infty$, $u_k(Z)/k \rightarrow 1$ uniformément sur \mathbb{H}_r . En effet,

$$u_k(Z) = \left. \frac{\partial F_\alpha^{\circ k}(Z)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{j=0}^{k-1} u_1(Z + j\alpha_0).$$

Donc,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k(Z)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} u_1(Z + j\alpha_0) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} u_1(Z) dZ$$

puisque la rotation d'angle irrationnel α_0 est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Cette intégrale est égale au coefficient de Fourier constant de u_1 qui est égal à 1 puisque $u_1(Z) \rightarrow 1$ quand $\text{Im}(Z) \rightarrow +\infty$. Choisissons k suffisamment grand pour que

$$(\forall Z \in \mathbb{H}_r) \quad \left| \frac{u_k(Z)}{k} - 1 \right| < c/2.$$

Choisissons n suffisamment grand pour que

$$(\forall Z \in \mathbb{H}_r) \quad |(\alpha_n - \alpha_0)v_k(\alpha_n, Z)| < c/2.$$

Alors, pour tout $Z \in \overline{\mathbb{H}}_r$,

$$u_k(Z) + (\alpha_n - \alpha_0)v_k(\alpha_n, Z) \in D(k, kc)$$

et

$$(\alpha_n - \alpha_0)u_k(Z) + (\alpha_n - \alpha_0)^2v_k(\alpha_n, Z) \in \mathbb{H}.$$

Donc, $F_{\alpha_n}^{\circ k}(\mathbb{H}_r) \subset \mathbb{H}_r$ et $f_{\alpha_n}^{\circ k}(D_r) \subset D_r$. \square

Fixons $r < 1$ et choisissons k tel que pour n assez grand, $f_{\alpha_n}^{\circ k}(D_r) \subset D_r$. Alors, D_r appartient au bassin d'attraction de 0 et l'application

$$\psi_n := \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{f_{\alpha_n}^{\circ j}}{(e^{2i\pi\alpha_n})^j} : D_r \rightarrow \mathbb{C}$$

linéarise f_{α_n} . On a $\psi_n(0) = 0$ et $\psi'_n(0) = 1$. Qui plus est, ψ_n est limite d'applications univalentes. Elle est donc univalente et la famille des ψ_n est normale. Toute valeur d'adhérence ψ linéarise la rotation $f_{\alpha_0} = R_{\alpha_0}$ et est donc égale à l'identité. Par conséquent, pour n assez grand, l'inverse de $\psi_n : D_r \rightarrow \mathbb{C}$ est définie sur un disque euclidien centré en 0 de rayon arbitrairement proche de 1. Cet inverse est précisément φ_{α_n} , et donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} r(f_{\alpha_n}) \geq 1.$$

□

On voit donc que le résultat de Jean-Christophe Yoccoz se généralise à toute famille analytique de polynômes.

Proposition 14

Soit $\lambda_0 \in S^1$, $U \subset \mathbb{C}^*$ un voisinage de λ_0 et $\{Q_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}_{\lambda \in U}$ une famille analytique de polynômes (de degré quelconque) qui fixent 0 avec dérivée λ . Alors, quand $\lambda \in \mathbb{D} \rightarrow \lambda_0$ non tangentiellement, on a $\lim r(Q_\lambda) = r(Q_{\lambda_0})$.

Démonstration. Si $\lambda \in \mathbb{D}$, l'application $\varphi_\lambda : D_{r(Q_\lambda)} \rightarrow \mathbb{C}$ qui fixe 0 avec dérivée 1 et conjugue la rotation $z \mapsto \lambda z$ à Q_λ est univalente. La famille $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in U \cap \mathbb{D}}$ est donc normale. Comme précédemment, toute valeur d'adhérence linéarise la limite, et donc, quand $\lambda \in \mathbb{D} \rightarrow \lambda_0$,

$$\limsup r(Q_\lambda) \leq r(Q_{\lambda_0}).$$

Le lemme 12 page 15 implique que quand $\lambda \in \mathbb{D} \rightarrow \lambda_0$ non tangentiellement,

$$\liminf r(Q_\lambda) \geq r(Q_{\lambda_0}).$$

□

L'hypothèse d'analyticité par rapport à λ peut être affaiblie (Lipschitz suffit probablement). L'exemple suivant justifie l'utilité d'une telle hypothèse.

Exemple. Considérons $\lambda_0 \in S^1$ tel que le polynôme quadratique Q_{λ_0} n'est pas linéarisable. Choisissons une suite $\lambda_n \in \mathbb{D} \rightarrow \lambda_0$ (on peut la choisir qui converge radialement). Alors, $r(Q_{\lambda_n}) \rightarrow 0$. Choisissons maintenant une suite $\varepsilon_n > 0$ qui tend vers 0 moins vite que $r(Q_{\lambda_n})$, c'est-à-dire telle que $r(Q_{\lambda_n}) = o(\varepsilon_n)$. Posons

$$P_n : z \mapsto \frac{1}{\varepsilon_n} Q_{\lambda_n}(\varepsilon_n z).$$

Alors, P_n est une suite de polynômes quadratiques qui converge vers la rotation $z \mapsto \lambda_0 z$. Cependant,

$$r(P_n) = \frac{r(Q_{\lambda_n})}{\varepsilon_n} \rightarrow 0.$$

Nous verrons (corollaires 9 et 11 page 44) qu'en revanche,

- si α_0 est un nombre de Brjuno (nous donnerons la définition plus loin),
- si $\alpha_n = \alpha_0$ pour tout n ou si $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ avec $\text{Im}(\alpha_n) > c|\alpha_n - \alpha_0|$, et
- si $f_n \in \mathcal{S}_{\alpha_n}$ converge vers R_{α} uniformément sur tout compact de \mathbb{D} ,

alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} r(f_n) \geq 1.$$

Lukas Geyer [G] a observé que la démonstration du théorème 11 page 14 donne le résultat suivant. Son but était de simplifier la démonstration de l'existence de disques de Siegel à bord \mathcal{C}^∞ (voir théorème 20 page 23).

Théorème 15

Soit $P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha} z(1+z)$. La fonction

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\longrightarrow [-\infty, \log 2] \\ \alpha &\longmapsto \log r(P_\alpha) \end{aligned}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. $u(\alpha) = -\infty$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}$,
2. $u(\alpha) > -\infty$ pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. la fonction u est semi-continue supérieurement,
4. pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\limsup_{\alpha' \rightarrow \alpha^-} u(\alpha') = \limsup_{\alpha' \rightarrow \alpha^+} u(\alpha') = u(\alpha) \quad \text{et}$$

5. la fonction u satisfait la propriété des valeurs intermédiaires.

Démonstration. Les propriétés 1 et 2 sont immédiates. Pour 3, supposons $\alpha_n \rightarrow \alpha$ et $\lim u(\alpha_n) = y > -\infty$. Alors, les applications univalentes $\varphi_{\alpha_n} : D_{e^y} \rightarrow \mathbb{C}$ qui fixent 0 avec dérivée 1 et qui conjuguent la rotation R_{α_n} au polynôme P_{α_n} forment une famille normale. Par passage à la limite, toute valeur d'adhérence $\varphi : D_{e^y} \rightarrow \mathbb{C}$ fixe 0 avec dérivée 1 et conjugue la rotation R_α au polynôme P_α . Par conséquent, $r(P_\alpha) \geq e^y$ et $u(\alpha) \geq y$.

Pour montrer 5 à partir de 4, supposons $\alpha_0 < \alpha_1$ et choisissons y entre $u(\alpha_0)$ et $u(\alpha_1)$. Si $u(\alpha_0) > u(\alpha_1)$, on pose $\alpha_2 = \sup\{\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1] \mid u(\alpha) \geq y\}$ (ce qui est bien défini car $u(\alpha_0) \geq y$). Alors, $u(\alpha_2) \geq y$ car u est semi-continue supérieurement. De plus, il existe $\alpha' \rightarrow \alpha_2^+$ avec $u(\alpha') \rightarrow u(\alpha_2)$. Comme $\alpha' > \alpha_2$, on a $u(\alpha') < y$ et $u(\alpha_2) \leq y$. Par conséquent, $u(\alpha_2) = y$. Si $u(\alpha_0) < u(\alpha_1)$, on pose $\alpha_2 = \inf\{\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1] \mid u(\alpha) \geq y\}$ et on vérifie de manière similaire que $u(\alpha_2) = y$.

Venons-en à la démonstration de 4. Posons

$$L := \limsup_{\alpha' \rightarrow \alpha^-} u(\alpha') \quad \text{et} \quad R := \limsup_{\alpha' \rightarrow \alpha^+} u(\alpha').$$

La semi-continuité supérieure de u implique: $\max(L, R) \leq u(\alpha)$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $u < L + \varepsilon$ sur $[\alpha - \delta, \alpha]$ et $u < R + \varepsilon$ sur $[\alpha, \alpha + \delta]$. D'après le théorème 11 page 14, u est la limite radiale d'une fonction qui est harmonique dans le demi-plan supérieur et majorée par $\log 2$. Elle est donc majorée par les limites radiales de la fonction harmonique dans le demi-plan supérieur, qui vaut $L + \varepsilon$ sur $[\alpha - \delta, \alpha]$, $R + \varepsilon$ sur $[\alpha, \alpha + \delta]$ et $\log 2$ sinon. On a donc

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \max(L, R) \leq u(\alpha) \leq \frac{L + R}{2} + \varepsilon.$$

D'où $L = R = u(\alpha)$. □

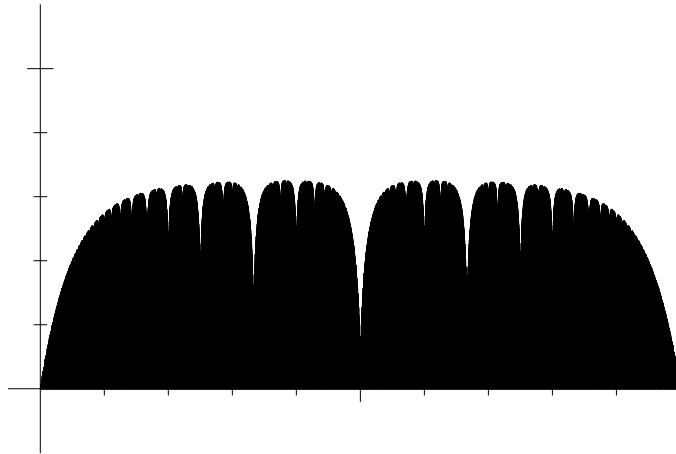


FIG. 1.3 – Le graphe de la fonction $\alpha \in [0,1] \mapsto r(P_\alpha)$ pour le polynôme quadratique $P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z(1+z)$.

Corollaire 16

L'adhérence du graphe de la fonction $\alpha \mapsto r(P_\alpha)$ est égal à son sous-graphe. Plus précisément, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $r \in [0, r(P_\alpha)]$, il existe $\alpha_n \rightarrow \alpha^-$ et $\alpha'_n \rightarrow \alpha^+$ avec $r(P_{\alpha_n}) \rightarrow r$ et $r(P_{\alpha'_n}) \rightarrow r$.

Démonstration. Pour toute suite $p_n/q_n \rightarrow \alpha$ on a $r(P_{p_n/q_n}) \leq r \leq r(\alpha)$. Puisque $\alpha \mapsto r(P_\alpha)$ satisfait la propriété des valeurs intermédiaires, on peut trouver α_n entre α et p_n/q_n avec $r(P_{\alpha_n}) = r$. \square

1.4.1 Optimalité du polynôme quadratique

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème suivant. Le résultat est essentiellement du à Jean-Christophe Yoccoz [Y]. Nous présentons une démonstration qui permet d'éviter l'utilisation des applications quasi-conformes et donne un résultat plus fort (comparer à la question posée dans [Y] page 63).

Théorème 17

Si le polynôme quadratique $P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z + z^2$ est linéarisable, alors toute application $f \in \mathcal{S}_\alpha$ est linéarisable et

$$r(f) \geq \frac{1}{20}r(P_\alpha).$$

Remarque. La constante $1/20$ n'a rien d'optimal.

Démonstration. Supposons P_α linéarisable et $f \in \mathcal{S}_\alpha$. Considérons les familles d'applications $\{f_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}\}_{a \in \mathbb{C}}$ et $\{g_b : D_{1/|b|} \rightarrow \mathbb{C}\}_{b \in \mathbb{C}}$ définies par

$$f_a(z) := f(z) + az^2 \quad \text{et} \quad g_b(z) := \frac{1}{b}f_{1/b}(bz) = \frac{1}{b}f(bz) + z^2.$$

La famille g_b se prolonge analytiquement en $b = 0$ par $g_0 = P_\alpha$. On a trivialement

$$(\forall b \in \mathbb{C}^*) \quad r(g_b) = \frac{1}{|b|}r(f_{1/b}).$$

Lemme 18

Pour tout $b \in D_{1/20}$, il existe un ouvert $V_b \subset D_{10}$ tel que $g_b : V_b \rightarrow D_{20}$ est à allure quadratique.

Démonstration. Comme f est univalente dans \mathbb{D} et fixe 0 avec une

dérivée de module 1,

$$(\forall z \in \mathbb{D}) \quad |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Un calcul élémentaire montre alors que si $w \in D_{20}$ et si $|b| \leq 1/20$,

$$(\forall z \in \partial D_{10}) \quad \left| \frac{1}{b} f(bz) - w \right| < |z^2 - w|.$$

D'après le théorème de Rouché, chaque $w \in D_{20}$ a exactement 2 préimages par g_b dans D_{10} (en comptant les multiplicités). Pour $|b| \leq 1/20$ on définit

$$V_b := \{z \in D_{10} \mid g_b(z) \in D_{20}\}.$$

L'application $g_b : V_b \rightarrow D_{20}$ est alors une application à allure quadratique (la connexité de V_b suit du fait que g_b a un point fixe indifférent et du lemme de Schwarz). \square

Lemme 19

L'application $b \mapsto r(g_b)$ est harmonique dans un voisinage de $\overline{D}_{1/20}$.

Démonstration. On commence par choisir $R > 1/20$ suffisamment proche de $1/20$ et $t_0 < 1$ suffisamment proche de 1 de sorte que pour tout $b \in D_R$ et tout $t \in [t_0, 1]$, l'application

$$\begin{aligned} g_{b,t} : V_b &\longrightarrow D_{20t} \\ z &\longmapsto t \cdot g_b(z) \end{aligned}$$

est à allure quadratique. Pour $t \in [t_0, 1]$, soit $\omega_{b,t}$ l'unique point critique de $g_{b,t}$ dans V_b , soit $\Omega_{b,t}$ le bassin d'attraction de 0 pour $g_{b,t}$ et soit $\psi_{b,t} : \Omega_{b,t} \rightarrow \mathbb{C}$ la linéarisante définie par :

$$\psi_{b,t}(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(te^{2i\pi\alpha})^n} g_{b,t}^{\circ n}(z).$$

Considérons la famille de fonctions holomorphes

$$\begin{aligned} U_t : D_R &\longrightarrow D_{10} \setminus \{0\} \\ b &\longmapsto \psi_{b,t}(\omega_{b,t}). \end{aligned}$$

Cette famille est normale, et il existe une suite $t_n \rightarrow 1$, telle que U_{t_n} converge uniformément sur tout compact de D_R vers une fonction holomorphe $U_1 : D_R \rightarrow D_{10}$ qui, soit est identiquement nulle, soit ne s'annule pas. Comme dans la démonstration du théorème 11 page 14, on a alors

$$\log r(g_b) = \log |U_1(b)|.$$

Comme $r(g_0) = r(P_\alpha) > 0$, $U_1(b)$ ne s'annule pas dans D_R et $b \mapsto \log r(g_b)$ y est harmonique. \square

Par conséquent, en posant $r = 1/20$, on a :

$$\log r(P_\alpha) = \log r(g_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C(0,r)} \log r(g_b) |db|.$$

Soient maintenant $c_k(a)$ les coefficients de la série formelle $\varphi_a(z) = z + O(z^2)$ qui conjugue R_α à f_a . Les fonctions c_k sont polynômiales en a . Donc, $a \mapsto \frac{1}{k+1} \log |c_k(a)|$ est sous-harmonique. Si on pose $R = 20$, on a,

$$\begin{aligned} -\log r(f_0) &= \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} \log |c_k(0)| \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi R} \int_{C(0,R)} \frac{1}{k+1} \log |c_k(a)| |da|. \end{aligned}$$

De plus, pour $a \in \mathbb{C}$,

$$-\log r(f_a) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \log |c_k(a)|.$$

Si $|a| = 20$, le disque de Siegel Δ_a de f_a est contenu dans le disque $D_{1/2}$. D'après les inégalités de Cauchy appliquées à $\varphi_a : D_{r(f_a)} \rightarrow \Delta_a \subset D_{1/2}$:

$$(\forall k \geq 2) (\forall a \in C(0,20)) \quad \frac{1}{k+1} \log |c_k(a)| \leq -\log r(f_a) - \frac{1}{k+1} \log 2.$$

La fonction $a \mapsto \log r(f_a)$ est continue donc minorée sur le cercle $|a| = 20$. On a donc une majoration uniforme des fonctions $a \mapsto \frac{1}{k+1} \log |c_k(a)|$ sur le cercle $|a| = 20$. D'après le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} -\log r(f_0) &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi R} \int_{C(0,R)} \frac{1}{k+1} \log |c_k(a)| |da| \\ &\leq \frac{1}{2\pi R} \int_{C(0,R)} -\log r(f_a) |da| \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{C(0,r)} (-\log r(g_b) - \log |b|) |db| \\ &= -\log r(P_\alpha) + \log 20. \end{aligned}$$

□

1.5 Disques de Siegel à bord C^∞

Au début des années 1990, Michael Herman et Jean-Christophe Yoccoz posent la question de l'existence d'applications ayant un disque de Siegel dont le bord est une courbe de Jordan C^∞ .

En 1997, Ricardo Pérez-Marco [PM] montre qu'il existe des applications univalentes dans le disque unité ayant un disque de Siegel dont le bord est une courbe de Jordan \mathcal{C}^∞ relativement compacte dans \mathbb{D} .

Nous allons maintenant montrer l'existence de polynômes quadratiques ayant un disque de Siegel dont le bord est une courbe de Jordan \mathcal{C}^∞ . Nous présentons une démonstration obtenue en collaboration avec Artur Avila et Arnaud Chéritat [ABC] et simplifiée par Lukas Geyer [G].

Dans le résultat suivant, P_α est le polynôme quadratique

$$P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z(1+z)$$

et lorsque $r(P_\alpha) > 0$, Δ_α est le disque de Siegel de P_α et $\varphi_\alpha : D_{r(P_\alpha)} \rightarrow \Delta_\alpha$ la représentation conforme qui fixe 0 avec dérivée 1.

Théorème 20 (Avila-Buff-Chéritat)

Supposons que le polynôme P_{α_0} est linéarisable. Pour tout $r \in]0, r(P_{\alpha_0})[$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble de Cantor $K \subset [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon]$ tel que pour tout $\alpha \in K$, $r(P_\alpha) = r$ et $\varphi_\alpha : D_r \rightarrow \Delta_\alpha$ est la restriction d'une application continue bijective $\varphi_\alpha : \overline{D}_r \rightarrow \overline{\Delta}_\alpha$ telle que $\varphi_\alpha : \partial D_r \rightarrow \partial \Delta_\alpha$ est un plongement \mathcal{C}^∞ .

Démonstration. Définissons des suites α_n et ε_n par récurrence de la manière suivante. Soit r_n une suite qui décroît vers r avec $r_0 = r(P_{\alpha_0})$. Posons $\varepsilon_0 = \varepsilon/10$. Supposons α_n et ε_n définies.

Soit $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n/10$ tel que

$$|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon_{n+1} \implies r(P_\alpha) < r(P_{\alpha_n}) + \varepsilon_n$$

(cela est possible grâce à la semi-continuité supérieure de $\alpha \mapsto r(P_\alpha)$). D'après le corollaire 16 page 20, on peut choisir α_{n+1} de sorte que

- $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \varepsilon_{n+1}/10$,
- $r(P_{\alpha_{n+1}}) = r_{n+1}$ et
- les fonctions \mathbb{R} -analytiques

$$u_n : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad u_{n+1} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \varphi_{\alpha_n}(re^{2i\pi t}) \quad \quad \quad t \longmapsto \varphi_{\alpha_{n+1}}(re^{2i\pi t})$$

sont ε_{n+1} -proches dans l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Soit $\alpha' = \lim \alpha_n$. Par construction, $|\alpha' - \alpha_n| < \varepsilon_{n+1}$ pour $n \geq 0$. Par définition de ε_{n+1} , cela implique

$$r(P_{\alpha'}) < r(P_{\alpha_n}) + \varepsilon_n.$$

Puisque $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et $r(P_{\alpha_n}) \rightarrow r$, nous en déduisons que $r(P_{\alpha'}) \leq r$. Par semi-continuité supérieure de $\alpha \mapsto r(P_\alpha)$, $r(P_{\alpha'}) \geq \lim r(P_{\alpha_n})$, donc $r(P_{\alpha'}) = r$. Les fonctions u_n convergent vers une fonction $v : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est \mathcal{C}^∞ (et même ε -proche de u_0 dans l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$). En particulier, (pour ε suffisamment petit) cela implique que v est un plongement. Puisque $\varphi_{\alpha'} = \lim \varphi_{\alpha_n}|_{D_r}$, la fonction $\varphi_{\alpha'}$ a un prolongement continu (en fait \mathcal{C}^∞) au bord de D_r donné par $\varphi_{\alpha'}(re^{2i\pi t}) = v(t)$.

Comme à chaque étape, on peut choisir $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ ou bien $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, l'ensemble des limites α' que l'on peut obtenir par cette construction contient un ensemble de Cantor. \square

1.6 Le contrôle de l'explosion parabolique

Arnaud Chéritat a introduit cette notion dans sa thèse [C] et a observé que l'on pouvait l'utiliser pour contrôler le rayon conforme des disques de Siegel des polynômes quadratiques.

1.6.1 La taille asymptotique

Supposons que f est une application fixant 0 avec pour multiplicateur une racine de l'unité. Dans ce cas, l'application n'est généralement pas linéarisable et $r(f) = 0$. Arnaud Chéritat [C] a introduit une quantité qui joue un rôle analogue à celui du rayon conforme d'un disque de Siegel. Il appelle cette quantité la *taille asymptotique*.

Définition 5

Si $f \in \mathcal{O}_0$ est de la forme

$$f(z) = z + Az^{k+1} + O(z^{k+2}) \quad \text{avec } A \neq 0,$$

le nombre de pétales de f est k et la taille asymptotique de f est

$$L_a(f) := \frac{1}{|kA|^{1/k}}.$$

Si $f = \text{Id}$, on pose $L_a(f) := +\infty$.

Arnaud Chéritat a donné le nom de taille asymptotique à cette quantité pour la raison suivante : pour tout point z dont l'orbite est attirée par 0 (sans y tomber en un nombre fini de coups), on a :

$$|f^{\circ n}(z)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{L_a(f)}{n^{1/k}}.$$

On en déduit facilement que pour tout $j \geq 1$,

$$L_a(f^{\circ j}) = \frac{L_a(f)}{j^{1/k}}.$$

De plus, si $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ avec $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ une application univalente au voisinage de 0, alors

$$L_a(f) = L_a(g) \cdot |\varphi'(0)|.$$

Lemme 21

Il existe une suite $(c_k > 0)$ avec $c_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$ telle que pour tout $k \geq 1$ et toute application univalente $f : D_r \rightarrow \mathbb{C}$ qui fixe 0 avec dérivée 1 et nombre de pétale k , on a $L_a(f) \geq c_k \cdot r$.

Première démonstration. Si $f : D_r \rightarrow D_R$ fixe 0 avec dérivée 1, l'inégalité de Cauchy permet de majorer $|A|$ et l'on obtient :

$$L_a(f) \geq r \cdot \left(\frac{r}{kR} \right)^{1/k}.$$

Si f est univalente dans D_r , alors l'image du disque de rayon $r/2$ est contenue dans le disque de rayon $2r$. \square

Seconde démonstration. D'après le théorème de De Branges (conjecture de Bieberbach), on a la minoration :

$$L_a(f) \geq r \cdot \left(\frac{1}{k(k+1)} \right)^{1/k}$$

où k est le nombre de pétales. \square

Dans le cas d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle, chaque cycle de pétale attractif doit attirer un point critique. Pour un polynôme quadratique, un seul point critique peut être attiré (le point critique à l'infini est fixe). Par conséquent,

$$P_{p/q}^{\circ q}(z) = z + A_{p/q} z^{q+1} + O(z^{q+2}) \quad \text{avec} \quad A_{p/q} \neq 0.$$

Définition 6

Dans toute la suite, on utilise la notation

$$L_a(p/q) := L_a(P_{p/q}^{\circ q}) := \frac{1}{|qA_{p/q}|^{1/q}}.$$

1.6.2 Un lemme de Jellouli

Le lemme suivant apparaît dans la thèse d’Habib Jellouli [J1] (voir également [J2] théorème 1).

Lemme 22 (Jellouli)

Soit U un voisinage de $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f : U \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une application analytique telle que pour tout $\alpha \in U$,

- l’application $f_\alpha := f(\alpha, \cdot) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application univalente qui fixe 0 avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$ et
- f_{α_0} est la rotation R_{α_0} .

Si $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ et $p_n/q_n \rightarrow \alpha_0$ avec $\alpha_n - \alpha_0 = o(1/q_n)$ et $p_n/q_n - \alpha_0 = o(1/q_n)$, alors $f_{\alpha_n}^{\circ q_n} \rightarrow \text{Id}$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} .

Remarque. Ce lemme s’applique en particulier si les p_n/q_n sont des réduites de α_0 (voir le deuxième chapitre de ce manuscrit).

Démonstration. Pour tout $\rho < 1$, il existe une constante C telle que pour tout $z \in D_\rho$ et tout α suffisamment proche de α_0 , on a

$$|f_\alpha(z) - R_{\alpha_0}(z)| \leq C|\alpha - \alpha_0|.$$

Comme $\alpha_n - \alpha_0 = o(1/q_n)$ et comme $p_n/q_n - \alpha_0 = o(1/q_n)$, on voit que sur D_ρ ,

$$|f_{\alpha_n}(z) - e^{2i\pi p_n/q_n} z| = o(1/q_n).$$

On peut donc itérer q_n fois f_{α_n} sur un disque de rayon arbitrairement proche de ρ et le $q_n^{\text{ème}}$ itéré est arbitrairement proche de l’identité. \square

Corollaire 23

Si P_{α_0} a un disque de Siegel Δ , si $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ et $p_n/q_n \rightarrow \alpha_0$ avec $\alpha_n - \alpha_0 = o(1/q_n)$ et $p_n/q_n - \alpha_0 = o(1/q_n)$, alors $P_{\alpha_n}^{\circ q_n}$ converge uniformément vers l’identité sur tout compact de Δ .

Démonstration. Soit $\chi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta$ un isomorphisme qui fixe 0. Considérons la famille

$$f_\alpha := \chi^{-1} \circ P_\alpha \circ \chi$$

qui est définie au voisinage de $z = 0$. Quand $\alpha \rightarrow \alpha_0$, le domaine de f_α mange tout compact de \mathbb{D} . La famille f_α dépend analytiquement de α et $f_{\alpha_0} = R_{\alpha_0}$. Le résultat découle du lemme précédent. \square

Arnaud Chéritat [C] en déduit le contrôle suivant de la taille asymptotique.

Lemme 24

Soit U un voisinage de $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f : U \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une application analytique telle que pour tout $\alpha \in U$,

- l'application $f_\alpha := f(\alpha, \cdot) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application univalente qui fixe 0 avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$ et
- f_{α_0} est la rotation R_{α_0} .

Alors,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} L_\alpha(f_{p_n/q_n}^{\circ q_n}) \geq 1.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des lemmes 21 page 25 et 22 page précédente. \square

Corollaire 25

Si P_α est linéarisable et si $p_n/q_n \rightarrow \alpha$ avec $p_n/q_n - \alpha = o(1/q_n)$, alors

$$\liminf L_\alpha(p_n/q_n) \geq r(P_\alpha).$$

Démonstration. On se ramène au cas précédent en conjuguant par une application qui linéarise P_α . \square

1.6.3 L'explosion parabolique

Quand $\alpha \neq p/q$ est proche de p/q , 0 est un point fixe simple de P_α et $P_\alpha^{\circ q}$ a q points fixes proches de 0. Nous allons maintenant étudier comment ces points dépendent de α .

Définition 7

Soit \mathcal{P}_q l'ensemble des paramètres $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $P_\alpha^{\circ q}$ a un point fixe parabolique de multiplicateur 1. On pose

$$\rho_{p/q} := d(p/q, \mathcal{P}_q \setminus \{p/q\}) \quad \text{et} \quad r_{p/q} := \sqrt[q]{\rho_{p/q}}.$$

Le résultat suivant affirme que l'on peut suivre les points fixes de $P_\alpha^{\circ q}$ holomorphiquement comme fonction de $\sqrt[q]{\alpha - p/q}$ tant que $|\alpha - p/q| < \rho_{p/q}$.

Proposition 26

Pour tout nombre rationnel p/q , il existe une fonction holomorphe $\chi : D_{r_{p/q}} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- $\chi(0) = 0$ et $\chi(\delta) \neq 0$ pour $\delta \neq 0$
- $|\chi'(0)| = (2\pi q^2)^{1/q} L_a(p/q)$ et
- l'ensemble

$$\langle \chi(\delta), \chi(\zeta\delta), \chi(\zeta^2\delta), \dots, \chi(\zeta^{q-1}\delta) \rangle \quad \text{avec} \quad \zeta := e^{2i\pi p/q}$$

forme un cycle de période q pour $P_{p/q+\delta^q}$.

Démonstration. D'après le théorème des fonctions implicites, quand α varie, on peut suivre les points périodiques de P_α holomorphiquement tant que le multiplicateur est $\neq 1$. Dans $D(p/q, \rho_{p/q}) \setminus \{p/q\}$, aucun point de période divisant q n'a un multiplicateur égal à 1. Il y a de la monodromie quand α tourne une fois autour de p/q . Pour comprendre cette monodromie, il suffit d'écrire :

$$P_{p/q+\varepsilon}^{\circ q}(z) - z = z \cdot (2i\pi q\varepsilon + A_{p/q}z^q + O(z\varepsilon) + O(z^{q+1})).$$

On supprime la monodromie en posant $\varepsilon = \delta^q$ ce qui donne

$$z^q = -\frac{2i\pi q}{A_{p/q}}\delta^q + O(z\varepsilon) + O(z^{q+1}).$$

Le resultat suit aisément. □

La fonction χ dépend de p/q et nous la noterons $\chi_{p/q}$. Elle est unique à précomposition par une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité près.

1.6.4 Minoration de $\rho_{p/q}$

Notre but est de comprendre comment les applications $\chi_{p/q}$ se comportent quand $p/q \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour cela, il faut d'abord comprendre comment $r_{p/q}$ se comporte quand $q \rightarrow +\infty$.

Lemme 27

Pour tout p/q , on a

$$\rho_{p/q} \geq \frac{1}{q^3}.$$

Démonstration. Si P_α a un point parabolique de période $\leq q$, alors soit $\alpha = p'/q'$ avec $q' \leq q$, soit l'ensemble de Julia est connexe, 0 est un

point fixe répulsif et le nombre de rotation combinatoire en 0 est p'/q' avec $q' < q$ (pour une justification de ce fait, voir [C] ou [BC1]). Dans ce cas, une inégalité de Yoccoz sur la taille des membres de l'ensemble de Mandelbrot implique que $|\alpha - p'/q'| < (\log 2)/(2\pi q')$ et le résultat suit aisément. \square

Corollaire 28

Quand $q \rightarrow +\infty$, $r_{p/q} \rightarrow 1$.

1.6.5 Comportement asymptotique quand $p/q \rightarrow \alpha$

Nous allons maintenant étudier le comportement asymptotique des applications $\chi_{p/q} : D_{r_{p/q}} \rightarrow \mathbb{C}$ quand $p/q \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Comme $r_{p/q} \rightarrow 1$, le domaine de $\chi_{p/q}$ mange tout compact de \mathbb{D} .

Proposition 29

La famille $\{\chi_{p/q} : D_{r_{p/q}} \rightarrow \mathbb{C}\}_{p/q \in \mathbb{Q}}$ est normale. Si $p/q \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

- soit P_α n'a pas de disque de Siegel et $\chi_{p/q} \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} ,
- soit P_α a un disque de Siegel Δ et toute valeur d'adhérence de la suite $\chi_{p/q}$ est une application $\chi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta$ qui prend ses valeurs dans Δ , fixe 0 et linéarise $P_\alpha : \chi \circ R_\alpha = P_\alpha \circ \chi$.

Démonstration. Comme $\chi_{p/q}(\delta)$ est un point périodique de $P_{p/q+\delta q}$, les fonctions $\chi_{p/q}$ sont uniformément bornées. Cela donne la normalité. De plus, toute valeur d'adhérence χ prend ses valeurs dans l'ensemble de Julia rempli $K(P_\alpha)$ de P_α et fixe 0. Si P_α n'est pas linéarisable, 0 est dans le bord de $K(P_\alpha)$ et χ ne peut être une application ouverte. Elle est donc constante, égale à 0. Sinon, P_α a un disque de Siegel Δ et χ prend ses valeurs dans Δ . En passant à la limite sur l'équation

$$P_{p/q+\delta q}(\chi(\delta)) = \chi(e^{2i\pi p/q}\delta),$$

on obtient

$$P_\alpha(\chi(\delta)) = \chi(e^{2i\pi\alpha}\delta).$$

\square

Arnaud Chéritat [C] en déduit le résultat suivant.

Proposition 30

Si $p/q \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et si $p/q - \alpha = o(1/q)$ (en particulier si ce sont des réduites de α), alors

$$L_a(p/q) \rightarrow r(P_\alpha)$$

et toute valeur d'adhérence de la suite $\chi_{p/q} : D_{r_{p/q}} \rightarrow \mathbb{C}$ est un isomorphisme $\chi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta$ qui fixe 0.

Démonstration. Soit $\chi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta$ une valeur d'adhérence de la suite $\chi_{p/q} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$. Rappelons que

$$|\chi'_{p/q}(0)| = (2\pi q^2)^{1/q} L_a(p/q).$$

On voit donc que $|\chi'_{p/q}(0)|$ et $L_a(p/q)$ sont équivalents quand $q \rightarrow \infty$. Le corollaire 25 page 27 implique que

$$|\chi'(0)| \geq \liminf L_a(p/q) \geq r(P_\alpha).$$

Le lemme de Schwarz permet alors de conclure la démonstration de la proposition : χ est un isomorphisme de \mathbb{D} dans Δ et $|\chi'(0)| = r(P_\alpha)$. \square

Si $\chi'_{p/q}(0) \rightarrow 0$, la proposition 29 page précédente affirme que $\chi_{p/q} \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} . Le résultat suivant permet de mieux contrôler ce comportement.

Proposition 31

Les fonctions

$$\psi_{p/q} := \frac{1}{\chi'_{p/q}(0)} \cdot \chi_{p/q}$$

forment une famille normale. Si $p/q \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avec $\chi'_{p/q}(0) \rightarrow 0$, alors $\psi_{p/q} \rightarrow \text{Id}$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} .

Démonstration. Observons d'abord que quand $q \rightarrow +\infty$ le $q^{\text{ème}}$ itéré du polynôme $P_{p/q}$ est défini et univalent sur un disque de rayon $o(1/q)$. Comme $|\chi'_{p/q}(0)|$ et $L_a(p/q)$ sont équivalents quand $q \rightarrow +\infty$, le lemme 21 page 25 implique que

$$\sqrt[q]{|\chi'_{p/q}(0)|} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 1.$$

Posons

$$\pi_{p/q}(\delta) := \prod_{\zeta^q=1} \frac{\chi_{p/q}(\zeta\delta)}{\zeta}.$$

La fonction $\pi_{p/q}$ est une fonction holomorphe de δ^q qui ne s'annule qu'en 0 avec

$$\pi_{p/q}(\delta) = \chi'_{p/q}(0)^q \delta^q \cdot (1 + O(\delta^q)).$$

On peut donc en extraire une racine $q^{\text{ème}}$ que l'on appelle $\mu_{p/q}$ et qui vérifie $\mu'_{p/q}(0) = \chi'_{p/q}(0)$. On a alors

$$\mu_{p/q}(\delta) = \chi'_{p/q}(0)\delta \cdot (1 + \delta^q \nu_{p/q}(\delta)).$$

Les fonctions $\chi_{p/q}$ sont uniformément bornées. Il en est de même des fonctions $\mu_{p/q}$. Comme $\sqrt[q]{|\chi'_{p/q}(0)|} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 1$, cela implique que

$$(\forall \rho < 1) \quad \sup_{D_\rho} |\nu_{p/q}| \leq B_q \quad \text{avec} \quad \sqrt[q]{B_q} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\chi'_{p/q}(0)} \cdot \mu_{p/q} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \text{Id}$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{D} .

Observons enfin que si $\zeta \neq 1$ est une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité, la fonction

$$\delta \mapsto \frac{\chi_{p/q}(\zeta\delta)}{\chi_{p/q}(\delta)}$$

évite les valeurs 0, 1 et ∞ et prend la valeur ζ en 0. On en déduit que pour tout $\rho < 1$, il existe $C > 0$ tel que si q est suffisamment grand et si $\zeta^q = 1$, alors

$$(\forall \delta \in D_\rho) \quad |\chi_{p/q}(\delta)| \leq C |\chi_{p/q}(\zeta\delta)|.$$

Alors,

$$\sup_{D_\rho} |\chi_{p/q}| \leq C \sup_{D_\rho} |\mu_{p/q}| \quad \text{et} \quad \limsup_{q \rightarrow +\infty} \sup_{D_\rho} |\psi_{p/q}| \leq C.$$

La famille $\psi_{p/q}$ est donc normale. □

Chapitre 2

La fonction de Brjuno-Yoccoz

2.1 Rappels sur les fractions continues

Pour tout réel α , $[\alpha]$ est la partie entière de α et $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ sa partie fractionnaire. Si α est irrationnel, on définit deux suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ par

$$a_0 = [\alpha], \quad \alpha_0 = \{\alpha\}, \quad a_{k+1} = \left\lfloor \frac{1}{\alpha_k} \right\rfloor \quad \text{et} \quad \alpha_{k+1} = \left\{ \frac{1}{\alpha_k} \right\},$$

de sorte que

$$\frac{1}{\alpha_k} = a_{k+1} + \alpha_{k+1}.$$

On pose alors

$$\beta_{-1} = 1 \quad \text{et} \quad \beta_k = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_k.$$

On définit deux suites $(p_k)_{k \geq -1}$ et $(q_k)_{k \geq -1}$ par

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, & p_0 &= a_0, & p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_{-1} &= 0, & q_0 &= 1, & q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned}$$

On a alors

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k.$$

En particulier, p_k et q_k sont premiers entre eux. De plus, pour tout $k \geq 0$,

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, \dots, a_k] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_k}}}.$$

Le nombre rationnel p_k/q_k s'appelle la $k^{\text{ème}}$ réduite de α . Il est bien connu que

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{p_k}{q_k},$$

ce que nous noterons

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_k, \dots].$$

Plus précisément, pour $k \geq 0$, on a les formules

$$\alpha = \frac{p_k + p_{k-1}\alpha_k}{q_k + q_{k-1}\alpha_k}, \quad q_k\alpha - p_k = (-1)^k \beta_k,$$

$$q_{k+1}\beta_k + q_k\beta_{k+1} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_{k+1} + q_k} < \beta_k < \frac{1}{q_{k+1}}.$$

La dernière inégalité implique que, pour $k \geq 0$,

$$\frac{1}{2q_k q_{k+1}} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} \leq \frac{1}{q_k^2}.$$

De plus, pour tout $k \geq 0$,

$$\alpha_k = [0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$$

2.2 La condition de Brjuno

En 1942, Carl L. Siegel [Si] montre que si α est un nombre *diophantien*, c'est-à-dire si

$$(\exists c > 0) (\exists \tau > 0) (\forall p/q \in \mathbb{Q}) \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^\tau},$$

alors toute application $f \in \mathcal{O}_\alpha$ est linéarisable. L'ensemble des nombres diophantiens est de mesure totale.

En 1969, Alexander Brjuno [Brj] reprend la démonstration de Siegel et montre que le résultat reste vrai si on suppose que α satisfait la condition plus faible, dite *condition de Brjuno*:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} < +\infty.$$

Jean-Christophe Yoccoz [Y] a introduit la caractérisation suivante des nombres de Brjuno.

Définition 1 (La fonction de Brjuno-Yoccoz)

Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$\Phi(\alpha) := \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\Phi(\alpha) = +\infty$. Les nombres pour lesquels $\Phi(\alpha) < +\infty$ sont les nombres de Brjuno. On note \mathcal{B} l'ensemble des nombres de Brjuno.

2.3 Minoration de $r(f)$ pour $f \in \mathcal{S}_\alpha$

Jean-Christophe Yoccoz [Y] a donné une démonstration géométrique du résultat de Brjuno. Il obtient en même temps une minoration de $r(f)$ pour $f \in \mathcal{S}_\alpha$. Nous allons maintenant présenter les grandes lignes de la démonstration.

Théorème 1

Si α est un nombre de Brjuno, alors toute application $f \in \mathcal{O}_\alpha$ est linéarisable. De plus,

$$(\exists c > 0) (\forall \alpha \in \mathcal{B}) (\forall f \in \mathcal{S}_\alpha) \quad r(f) \geq c e^{-\Phi(\alpha)}.$$

Toute application $f \in \mathcal{O}_\alpha$ est univalente sur un disque de rayon suffisamment petit. Quitte à conjuguer par une homothétie, pour démontrer le théorème, il suffit donc de minorer le rayon conforme des applications $f \in \mathcal{S}_\alpha$.

2.3.1 La renormalisation de Douady-Ghys

Soit $\alpha_0 \in]0,1[$ et soit $f_0 \in \mathcal{S}_{\alpha_0}$. Si on choisit $\rho_0 \in]0,1[$ suffisamment petit, on peut faire la construction suivante. Considérons un secteur \mathcal{U}_0 délimité par le segment $[0, \rho_0]$, son image par f_0 et une courbe joignant ρ_0 à $f_0(\rho_0)$, de sorte que l'ouverture de \mathcal{U}_0 en 0 soit $2\pi\alpha_0$. La surface de Riemann \mathcal{V}_0 obtenue comme quotient de \mathcal{U}_0 avec $[0, \rho_0]$ identifié à son image par f_0 est un disque épointé. L'application de premier retour dans \mathcal{U}_0 associée à f_0 induit une application holomorphe $g : \mathcal{V}'_0 \rightarrow \mathcal{V}_0$ avec $\mathcal{V}'_0 \subset \mathcal{V}_0$. Identifions \mathcal{V}_0 avec $D_{S_0} \setminus \{0\}$ où S_0 est choisi de sorte que $\mathbb{D}^* \subset \mathcal{V}'_0$. Alors, g est univalente et se prolonge en 0 par $g(0) = 0$ et $g'(0) = e^{-2i\pi\alpha_1}$ avec $\alpha_1 = \{1/\alpha_0\}$. L'application renormalisée f_1 est définie comme la restriction à \mathbb{D} de $\overline{g(\bar{z})}$. La conjugaison par $z \mapsto \bar{z}$ est là pour que la dérivée à l'origine soit $e^{2i\pi\alpha_1}$.

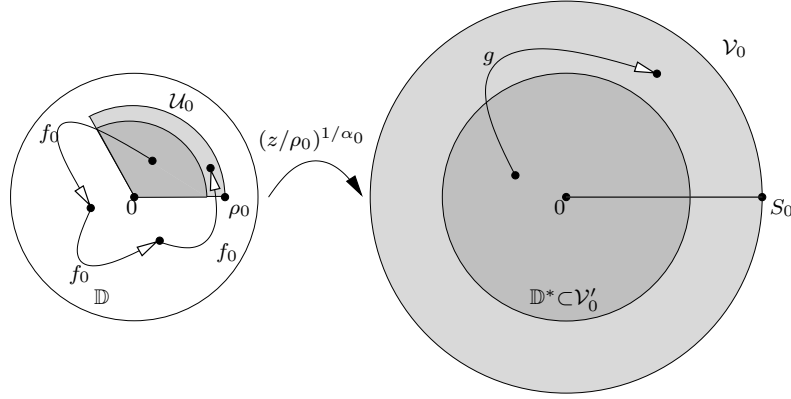


FIG. 2.1 – La construction de l'application renormalisée.

2.3.2 Estimées de distortion

Si l'application $f_0 : D_{\rho_0} \rightarrow \mathbb{C}$ était la rotation d'angle R_{α_0} , on pourrait faire la construction de sorte que S_0 soit égal à 1 et que l'application canonique $\chi_0 : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{V}_0$ soit $z \mapsto (z/\rho_0)^{1/\alpha_0}$. On choisit ρ_0 suffisamment petit pour que la surface de Riemann quotient soit bien définie et que l'application canonique $\chi_0 : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{V}_0$ soit proche de $z \mapsto (z/\rho_0)^{1/\alpha_0}$. Le lemme clé qui permet de contrôler cette construction est le suivant.

Lemme 2

Pour tout $C > 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]0,1[$ et tout $f \in \mathcal{S}_\alpha$, si

$$(\forall z \in D_\rho) \quad |f(z) - e^{2i\pi\alpha} z| < \varepsilon\alpha|z| \quad \text{et} \quad |f'(z) - e^{2i\pi\alpha}| < \varepsilon \quad (2.1)$$

alors,

1. pour tout $z \in D_{\rho/C}$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$$f^{\circ k}(z) \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad |f^{\circ k}(z)| < C|z|$$

et

2. on peut faire la construction de renormalisation avec le contrôle suivant sur l'application canonique $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$:

$$(\forall z \in \mathcal{U}) \quad \left(\frac{|z|}{C\rho} \right)^{1/\alpha} \leq |\chi(z)| \leq \left(\frac{C|z|}{\rho} \right)^{1/\alpha}.$$

Démonstration. Considérons le revêtement universel $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

défini par

$$\pi(Z) = \rho e^{2i\pi\alpha Z}.$$

L'application f se relève en une application F telle que $F - \text{Id}$ est une fonction $1/\alpha$ -périodique qui tend vers 1 quand $\text{Im}(Z) \rightarrow +\infty$. La condition (2.1) implique que pour tout $Z := X + iY \in \mathbb{H}$,

$$|F(Z) - Z - 1| \leq \varepsilon' e^{-2\pi\alpha Y} \quad \text{et} \quad |F'(Z) - 1| \leq \varepsilon' e^{-2\pi\alpha Y} \quad \text{avec} \quad \varepsilon' \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

En prenant ε suffisamment petit, on peut donc supposer que $\varepsilon' < 1/10$.

Dans les coordonnées Z , on choisit pour secteur \mathcal{U} la région délimitée par l'axe imaginaire positif, son image par F et le segment reliant 0 à $F(0)$. La surface de Riemann \mathcal{V} est le quotient de \mathcal{U} obtenu en identifiant iY avec $F(iY)$.

Montrons d'abord le point 1. On choisit ε suffisamment petit pour que $e^{10\pi\varepsilon'} < C$. L'orbite d'un point $Z \in \mathbb{H}$ reste au dessus de la droite qui passe par Z avec pente $-2\varepsilon'$. Par conséquent, l'orbite d'un point $Z := X + iY$ avec $X \in [-1/\alpha, 0[$ et $Y \geq 5\varepsilon'$ intersecte \mathcal{U} en un point W avec $\text{Im}(W) \geq Y - 4\varepsilon'$. Donc, si $|z| \leq \rho/C < \rho e^{-10\pi\alpha\varepsilon'}$, l'orbite de z intersecte \mathcal{U} en un point w avec $|w| \leq e^{8\pi\alpha\varepsilon'}|z| < C|z|$.

Montrons maintenant le point 2. Considérons la demi-bande

$$B := \{X + iY \mid 0 \leq X \leq 1 \text{ et } Y \geq 0\}.$$

L'application

$$\begin{aligned} H : \quad B &\longrightarrow \mathcal{U} \\ X + iY &\longmapsto (1 - X)iY + XF(iY) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme quasiconforme qui vérifie

$$|H(Z) - Z| \leq \varepsilon' \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial H / \partial \bar{Z}}{\partial H / \partial Z} \right| (X + iY) \leq \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'} e^{-2\pi\alpha Y}$$

et qui induit un homéomorphisme quasiconforme de B/\mathbb{Z} dans \mathcal{V} . En particulier, \mathcal{V} est isomorphe à \mathbb{H}/\mathbb{Z} et il existe une application univalente $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{H}$ telle que

$$L(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall Y > 0) \quad L(F(iY)) = L(iY) + 1.$$

L'application $L \circ H$ induit une application quasiconforme $K : \mathbb{H}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{H}/\mathbb{Z}$ qui fixe 0 et que l'on peut prolonger par $K(\bar{Z}) = \bar{K}(Z)$ en un homéomorphisme quasiconforme de $K : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. On a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\text{Im}(Z) \in [k, k+1]} \left| \frac{\partial K / \partial \bar{Z}}{\partial K / \partial Z} \right| (Z) \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'} e^{-2\pi k\alpha} = O(\varepsilon'/\alpha).$$

Par conséquent, d'après le lemme 3 ci-dessous, on a $\sup_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} |K - \text{Id}| = O(\varepsilon'/\alpha)$

et

$$(\forall Z \in \mathcal{U}) \quad |L(Z) - Z| \leq c\varepsilon'/\alpha$$

avec c qui ne dépend ni de ε' ni de α . Il est alors facile de voir que l'on peut choisir $S := e^{2\pi(5\varepsilon' + c\varepsilon'/\alpha)}$ et comme $\chi(\rho e^{2i\pi\alpha Z}) = S e^{2i\pi L(Z)}$, on a alors

$$\left(\frac{|z|}{C\rho}\right)^{1/\alpha} \leq |\chi(z)| \leq \left(\frac{C|z|}{\rho}\right)^{1/\alpha} \quad \text{dès que} \quad \varepsilon' < \frac{\log C}{5 + 2c}.$$

□

Lemme 3

Soit $K : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ un homéomorphisme quasiconforme qui fixe 0 ainsi que les extrémités de \mathbb{C}/\mathbb{Z} . Il existe une constante c telle que si

$$\sup_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \left| \frac{\partial K / \partial \bar{Z}}{\partial K / \partial Z} \right| \leq 1/2$$

alors

$$\sup_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} |K - \text{Id}| \leq c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\text{Im}(Z) \in [k, k+1]} \left| \frac{\partial K / \partial \bar{Z}}{\partial K / \partial Z} \right| (Z).$$

Démonstration. Pour $n \geq 0$, posons $C_n := \{Z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \mid \text{Im}(Z) \in [k, k+1]\}$ si $n = 2k$, $C_n := \{Z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \mid \text{Im}(Z) \in [-k, -k+1]\}$ si $n = 2k+1$. Soit $\mu := \bar{\partial}K/\partial K$ et soit μ_n la restriction de μ à la réunion des cylindres C_k pour $k \leq n$. Soit $K_n : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ l'homéomorphisme quasiconforme qui fixe 0 et vérifie $\bar{\partial}K_n = \mu_n \cdot \partial K_n$. Comme $\mu_n \rightarrow \mu$ simplement et comme $\|\mu_n\|_\infty \leq 1/2$, on a $K_n \rightarrow K$ simplement. L'homéomorphisme quasiconforme $K_{n+1} \circ K_n^{-1}$ est conforme en dehors de $K_n(C_n)$ qui est contenu dans un cylindre de hauteur universellement majorée. Cela implique que

$$\|K_{n+1} - K_n\|_\infty \leq c \sup_{C_n} \|\mu\|_\infty.$$

□

2.3.3 La taille des disques de Siegel

Étant donnée une application $f_0 \in \mathcal{S}_{\alpha_0}$ on peut construire par récurrence une suite de renormalisées $f_n \in \mathcal{S}_{\alpha_n}$: une fois que f_n est définie, on choisit $C_n > 1$, $\varepsilon_n > 0$ donné par le lemme 2 page 35 et $\rho_n > 0$ de sorte que

$$(\forall z \in D_{\rho_n}) \quad |f_n(z) - e^{2i\pi\alpha_n} z| < \varepsilon_n \alpha_n |z| \quad \text{et} \quad |f'_n(z) - e^{2i\pi\alpha_n}| < \varepsilon_n$$

puis on définit f_{n+1} comme la renormalisée de f_n .

Posons

$$\rho'_n := \frac{\rho_n}{C_n^2}.$$

Le point clé, c'est que l'on peut itérer f_0 une infinité de fois sur le disque D_{σ_0} avec

$$\sigma_0 := \rho'_0 \cdot (\rho'_1)^{\alpha_0} \cdot (\rho'_2)^{\alpha_0 \alpha_1} \dots.$$

En effet, si $|z_0| < \sigma_0 < \rho_0/C_0$, son orbite sous itération de f_0 intersecte \mathcal{U}_0 en un point z'_0 avec $|z'_0| < C_0|z_0| < C_0\sigma_0$. L'image de z'_0 dans \mathcal{V}_0 est un point z_1 avec

$$|z_1| < \left(C_0 \frac{|z'_0|}{\rho_0} \right)^{1/\alpha_0} < \left(\frac{C_0^2 \sigma_0}{\rho_0} \right)^{1/\alpha_0} = \sigma_1 := \rho'_1 \cdot (\rho'_2)^{\alpha_1} \cdot (\rho'_3)^{\alpha_1 \alpha_2} + \dots.$$

Alors, l'orbite de z_1 sous itération de f_1 intersecte \mathcal{U}_1 en un point z'_1 avec $|z'_1| < C_1|z_1| < C_1\sigma_1$. L'image de z'_1 dans \mathcal{V}_1 est un point z_2 avec

$$|z_2| < \left(C_1 \frac{|z'_1|}{\rho_1} \right)^{1/\alpha_1} < \left(\frac{C_1^2 \sigma_1}{\rho_1} \right)^{1/\alpha_1} = \sigma_2 := \rho'_2 \cdot (\rho'_3)^{\alpha_2} \cdot (\rho'_4)^{\alpha_2 \alpha_3} + \dots,$$

et ainsi de suite. Puisque f_n est une $n^{\text{ème}}$ renormalisée de f_0 , pouvoir itérer f_n en z_n signifie que l'on peut itérer f_0 en z_0 plusieurs fois, et puisque n est arbitrairement grand, on peut itérer f_0 à partir de z_0 une infinité de fois.

D'après le théorème 6 page 9, D_{σ_0} est contenu dans le disque de Siegel de f_0 . On a donc

$$\begin{aligned} \log r(f_0) \geq \log \sigma_0 &= \log \rho'_0 + \alpha_0 \log \rho'_1 + \alpha_0 \alpha_1 \log \rho'_2 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_{k-1} \log \rho'_k. \end{aligned}$$

2.3.4 La minoration de Yoccoz

Si $f \in \mathcal{S}_\alpha$, alors quand $z \rightarrow 0$,

$$|f(z) - e^{2i\pi\alpha}z| = O(z^2) \quad \text{et} \quad |f'(z) - e^{2i\pi\alpha}| = O(z).$$

L'ensemble des fonctions univalentes dans \mathbb{D} qui fixent 0 avec une dérivée de module 1 est compact (pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de \mathbb{D}). Par conséquent, il existe une constante k telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, tout $f \in \mathcal{S}_\alpha$ et tout $z \in D_{1/2}$,

$$|f(z) - e^{2i\pi\alpha}z| < k|z|^2 \quad \text{et} \quad |f'(z) - e^{2i\pi\alpha}| < k|z|.$$

Il est alors facile de voir que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\alpha \in]0,1[$ et tout $f \in \mathcal{S}_\alpha$,

$$(\forall z \in D_{c\alpha}) \quad |f(z) - e^{2i\pi\alpha}z| < \varepsilon\alpha|z| \quad \text{et} \quad |f'(z) - e^{2i\pi\alpha}| < \varepsilon.$$

Construisons les renormalisées f_n en choisissant $C_n := 2$ (n'importe quelle constante > 1 ferait l'affaire) à toutes les étapes. On a alors $\varepsilon_n := \varepsilon > 0$ donné par le lemme 2 page 35. On peut donc choisir $\rho_n = c\alpha_n$ avec $c > 0$

une constante universelle. On a alors $\rho'_n = \frac{c}{4}\alpha_n$ et comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_{k-1} < 4$:

$$\log r(f_0) > \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_{k-1} \log \alpha_k + 4 \log \frac{c}{4} = -\Phi(\alpha_0) - C_0$$

avec C_0 une constante universelle.

2.3.5 La condition de Pérez-Marco

Ricardo Pérez-Marco a montré que sous certaines hypothèses, on peut améliorer le contrôle de ρ_n . En particulier, il a démontré le résultat suivant.

Définition 2

Un nombre irrationnel α vérifie la condition de Pérez-Marco si

$$\Psi(\alpha) := \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_{k-1} \log \log \frac{e}{\alpha_k} < +\infty.$$

On note \mathcal{PM} l'ensemble des irrationnels tels que $\Psi(\alpha) < +\infty$.

Théorème 4

Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \mathcal{PM}$, tout $f \in \mathcal{S}_\alpha$ qui n'a pas de point périodique dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ est linéarisable et

$$r(f) \geq ce^{-\Psi(\alpha)}.$$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{S}_\alpha$ n'a pas de point fixe dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, alors l'application $z \mapsto f(z)/z$ prend ses valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Elle est donc contractante pour la métrique hyperbolique de \mathbb{D} au départ et la métrique hyperbolique de $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ à l'arrivée. Elle prend la valeur $e^{2i\pi\alpha}$ en 0. On en

déduit aisément que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\alpha \in]0,1[$ et tout $f \in \mathcal{S}_\alpha$ qui n'a pas de point fixe dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$,

$$|z| \leq \frac{c}{\log(e/\alpha)} \implies |f(z) - e^{2i\pi\alpha}z| < \varepsilon\alpha|z| \quad \text{et} \quad |f'(z) - e^{2i\pi\alpha}| < \varepsilon.$$

Si $f_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ n'a pas de point périodique dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, alors les renormalisées $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ n'ont pas de point fixe autre que 0. On choisit $C_n := 2$ pour tout n . On a alors $\varepsilon_n = \varepsilon > 0$ donné par le lemme 2 page 35. On peut alors choisir $\rho_n = c/\log(e/\alpha_n)$ avec $c > 0$ une constante universelle. Le résultat en découle. \square

Corollaire 5

Si $\alpha \in \mathcal{PM}$ et si $f \in \mathcal{O}_\alpha$, alors soit f est linéarisable, soit f a des petits cycles.

2.3.6 Polynômes quadratiques et petits cycles

Comme Arnaud Chéritat l'a observé dans sa thèse [C], en combinant les résultats de Ricardo Pérez-Marco que nous venons d'exposer et le contrôle de l'explosion parabolique, nous retrouvons un résultat dû à Jean-Christophe Yoccoz.

Théorème 6

Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, soit le polynôme quadratique est linéarisable, soit 0 est accumulé par des petits cycles.

Démonstration. Soient $p_n/q_n \rightarrow \alpha$ les réduites de α . Si la suite $(\log q_{n+1})/q_n$ est bornée, il est facile de voir que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_{k-1} \log \log \frac{e}{\alpha_k} < +\infty.$$

La condition de Pérez-Marco est satisfaite et P_α soit est linéarisable, soit a des petits cycles.

Si la suite $(\log q_{n+1})/q_n$ n'est pas bornée, nous allons voir que le polynôme P_α a des petits cycles. On peut extraire une sous-suite n_j telle que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log q_{n_j+1}}{q_{n_j}} = +\infty.$$

Pour chaque j , on choisit δ_j tel que $\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}} + \delta_j^{q_{n_j}} = \alpha$. Puisque pour $n \geq 0$, on a

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

on voit que pour $j \geq 0$, on a

$$\log \frac{1}{\delta_j} \geq \frac{\log q_{n_j}}{q_{n_j}} + \frac{\log q_{n_j+1}}{q_{n_j}} \rightarrow +\infty.$$

Donc, quand $j \rightarrow \infty$, $\delta_j \rightarrow 0$. Comme les fonctions $\chi_{p/q}$ sont uniformément bornées, il suit du lemme de Schwarz que pour tout $r > 0$ et tout j suffisamment grand, le polynôme P_α a un cycle dans le disque D_r :

$$\left\langle \chi_j(\delta_j), \chi_j(\zeta_j \delta_j), \dots, \chi_j(\zeta_j^{q_{n_j}-1} \delta_j) \right\rangle \quad \text{avec} \quad \zeta_j := e^{2i\pi p_{n_j}/q_{n_j}}.$$

□

2.3.7 Minoration de la taille asymptotique

Intéressons-nous maintenant au cas d'une application $f \in \mathcal{S}_{p/q}$. Nous allons minorer la taille asymptotique $L_a(f^{\circ q})$ en fonction de $\Phi_{\text{trunc}}(p/q)$ dont nous donnons maintenant la définition.

Un nombre rationnel p/q a deux décompositions en fractions continues (par exemple, $13/32 = [0,2,2,6] = [0,2,2,5,1]$).

Définition 3

Soit $p/q := [a_0, \dots, a_m]$ un nombre rationnel. Pour $k \leq m$, on pose $\alpha_k = [0, a_{k+1}, \dots, a_m]$ et on définit

$$\Phi_{\text{trunc}}(p/q) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_0 \cdots \alpha_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k}.$$

Le somme ne dépend que de p/q , pas du choix de la fraction continue.

Exemple.

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{trunc}}(13/32) &= \log \frac{32}{13} + \frac{13}{32} \log \frac{13}{6} + \frac{13}{32} \cdot \frac{6}{13} \log \frac{6}{1} \\ &= \log \frac{32}{13} + \frac{13}{32} \log \frac{13}{6} + \frac{13}{32} \cdot \frac{6}{13} \log \frac{6}{1} + \frac{13}{32} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{1}{6} \log 1. \end{aligned}$$

Proposition 7

Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout nombre rationnel p/q et toute application $f \in \mathcal{S}_{p/q}$, on a

$$L_a(f^{\circ q}) \geq ce^{-\Phi_{\text{trunc}}(p/q)}.$$

Démonstration. Les techniques de renormalisations de Yoccoz montrent qu'il existe une constante universelle $c_0 > 0$ telle que le $q^{\text{ème}}$ itéré de f est défini sur le disque D_r avec $r = c_0 e^{-\Phi_{\text{trunc}}(p/q)}$. Comme $f^{\circ q} : D_r \rightarrow \mathbb{C}$ est univalente, le résultat suit du lemme 21 page 25. \square

2.3.8 Perturbation d'une rotation d'angle $\alpha \in \mathcal{B}$

Nous allons maintenant exploiter le fait que la constante C peut être choisie arbitrairement proche de 1 (ce qui oblige ε à être proche de 0).

Proposition 8

Si $\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow \alpha \in \mathcal{B}$ et si $f \in \mathcal{S}_{\alpha'} \rightarrow R_\alpha$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , alors

$$\liminf \Phi(\alpha') + \log r(f) \geq \Phi(\alpha).$$

Démonstration. Étant donné $\alpha_0 \in]0,1[$, si $f \in \mathcal{S}_{\alpha'} \rightarrow R_{\alpha_0}$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , on peut choisir $C \rightarrow 1$ et $\rho_0 \rightarrow 1$ pour construire la renormalisée $f_1 \in \mathcal{S}_{\alpha'_1}$. Celle-ci est alors à valeurs dans un disque de rayon qui tend vers 1. En effet,

$$|\chi(z)| \leq (C|z|/\rho_0)^{1/\alpha'_0} \rightarrow |z|^{1/\alpha_0} \leq 1$$

puisque $\alpha_0 \neq 0$. Comme $f'_1(0) \rightarrow e^{2i\pi\alpha_1}$ qui est de module 1, le lemme de Schwarz implique que $f_1 \rightarrow R_{\alpha_1}$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} . Puisque $\alpha_1 \neq 0$, on peut répéter le procédé.

Par conséquent, étant donnés $m \geq 0$, $C > 1$ et $\rho < 1$, si $f \in \mathcal{S}_{\alpha'}$ est suffisamment proche de R_α , on peut choisir

$$C_0 = \dots = C_{m-1} = C \quad \text{et} \quad \rho_0 = \dots = \rho_{m-1} = \rho.$$

Ensuite, comme dans la minoration de Yoccoz, on peut choisir

$$C_m = C_{m+1} = \dots = 2 \quad \text{et} \quad \rho_m = c\alpha'_m, \rho_{m+1} = c\alpha'_{m+1}, \dots$$

avec c une constante universelle. On a alors

$$\log r(f) \geq \sum_{k=0}^{m-1} \beta'_{k-1} \log \frac{\rho}{C^2} - \sum_{k=m}^{+\infty} \beta'_{k-1} \log \frac{1}{\alpha'_k} + \sum_{k=m}^{+\infty} \beta'_{k-1} \log \frac{c}{4}.$$

On a donc

$$\Phi(\alpha') + \log r(f) \geq 4 \log \frac{\rho}{C^2} + \sum_{k=0}^{m-1} \beta'_{k-1} \log \frac{1}{\alpha'_k} + 4\beta'_{m-1} \log \frac{c}{4}.$$

En passant à la limite quand $f \rightarrow R_\alpha$ (et donc $\alpha' \rightarrow \alpha$):

$$\liminf \Phi(\alpha') + \log r(f) \geq 4 \log \frac{\rho}{C^2} + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} + 4\beta_{m-1} \log \frac{c}{4}.$$

En passant à la limite quand $\rho \rightarrow 1$, $C \rightarrow 1$ et $m \rightarrow +\infty$:

$$\liminf \Phi(\alpha') + \log r(f) \geq \Phi(\alpha).$$

□

D'une part, en prenant $\alpha' \equiv \alpha$, nous avons immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 9

Si $\alpha \in \mathcal{B}$ et si $f \in \mathcal{S}_\alpha \rightarrow R_\alpha$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , alors

$$\liminf r(f) \geq 1.$$

D'autre part, en ce qui concerne la famille des polynômes quadratiques $P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z(1+z)$, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 10

La fonction $\Upsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Upsilon(\alpha) := \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$ est semi-continue inférieurement sur \mathcal{B} :

$$\liminf_{\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow \alpha \in \mathcal{B}} \Upsilon(\alpha') \geq \Upsilon(\alpha).$$

Démonstration. On se ramène à la proposition 8 page précédente en travaillant dans la coordonnée linéarisante de P_α , c'est-à-dire, en conjuguant par la linéarisante $\varphi_\alpha : \mathbb{D}_{r(P_\alpha)} \rightarrow \Delta_\alpha$. Quand $\alpha' \rightarrow \alpha$, le polynôme $P_{\alpha'}$ est conjugué à une application $f_{\alpha'} := \varphi_\alpha^{-1} \circ P_{\alpha'} \circ \varphi_\alpha$ qui converge uniformément sur tout compact de $D_{r(P_\alpha)}$ vers la rotation R_α . Pour se ramener à une application univalente sur \mathbb{D} , il suffit de conjuguer $f_{\alpha'}$ par une homothétie dont le rapport tend vers $r(P_\alpha)$ quand $\alpha' \rightarrow \alpha$. □

De la proposition 8 page 42, on peut également tirer le résultat suivant qui raffine la proposition 12 page 15.

Corollaire 11

Supposons que $\lambda = e^{2i\pi\alpha}$ avec $\alpha \in \mathcal{B}$, $\lambda_n \in \mathbb{D} \rightarrow \lambda$ non tangentielllement et $f_n \rightarrow R_\alpha$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} avec $f_n(0) = 0$ et $f'_n(0) = \lambda_n$. Alors,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} r(f_n) \geq 1.$$

Démonstration. Les applications

$$g_n := \frac{\lambda}{\lambda_n} f_n$$

fixent l'origine avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$ et $g_n \rightarrow R_\alpha$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} . Comme $\alpha \in \mathcal{B}$, la proposition 8 page 42 appliqué avec $\alpha' \equiv \alpha$ implique que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} r(g_n) \geq 1.$$

Par conséquent, pour tout $\rho < 1$, si n est assez grand, la linéarisante φ_n qui conjugue la rotation R_α à g_n est définie au voisinage de D_ρ . De plus, quand $n \rightarrow +\infty$, φ_n converge uniformément vers l'identité sur \overline{D}_ρ et φ'_n y converge uniformément vers 1. Le domaine $D_n := \varphi_n(\mathbb{D}_\rho)$ est invariant par g_n . Puisque $\lambda_n \in \mathbb{D} \rightarrow \lambda$ non tangentielllement, si n est assez grand,

$$f_n(D_n) = \frac{\lambda_n}{\lambda} \cdot D_n \subset D_n$$

(on utilise ici que la dérivée de φ_n sur ∂D_ρ est proche de 1). On conclut alors comme dans la proposition 12 page 15. \square

On peut utiliser les mêmes arguments pour contrôler la taille asymptotique plutôt que le rayon conforme des disques de Siegel. En particulier, on a le résultat suivant (comparer au lemme 24 page 27).

Proposition 12

Si $p/q \rightarrow \alpha \in \mathcal{B}$ et si $f \in \mathcal{S}_{p/q} \rightarrow R_\alpha$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , alors

$$\liminf \Phi_{\text{trunc}}(p/q) + \log L_a(f^{\circ q}) \geq \Phi(\alpha).$$

Démonstration. En reprenant les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 8 page 42 on peut montrer que l'application $f^{\circ q}$ est définie et univalente sur un disque $D_{r_{p/q}}$ avec

$$\liminf \Phi_{\text{trunc}}(p/q) + \log r_{p/q} \geq \Phi(\alpha).$$

Comme $q \rightarrow +\infty$, le lemme 21 page 25 montre que

$$\liminf \log L_a(f^{\circ q}) - \log r_{p/q} \geq 0.$$

Le résultat en découle. \square

2.3.9 Perturbation d'une rotation d'angle $\alpha \in \mathcal{PM}$

On peut reprendre le même type d'argument dans le cas où α est un nombre de Pérez-Marco. On obtient alors les résultats suivants.

Proposition 13

Si $\alpha' \in \mathcal{PM} \rightarrow \alpha \in \mathcal{PM}$, si $f \in \mathcal{S}_{\alpha'} \rightarrow R_\alpha$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , et si $f_{\alpha'}$ n'a pas de points périodiques dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, alors

$$\liminf \Psi(\alpha') + \log r(f) \geq \Psi(\alpha).$$

Démonstration. Comme précédemment, étant donné $m \geq 0$, $C > 1$ et $\rho < 1$, si $f \in \mathcal{S}_{\alpha'}$ est suffisamment proche de R_α , on peut choisir

$$C_0 = \dots = C_{m-1} = C \quad \text{et} \quad \rho_0 = \dots = \rho_{m-1} = \rho.$$

Ensuite, puisque $f_{\alpha'}$ n'a pas de points périodiques dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, on peut choisir

$$C_m = C_{m+1} = \dots = 2 \quad \text{et} \quad \rho_m = c / \log(e/\alpha'_m), \rho_{m+1} = c / \log(e/\alpha'_{m+1}), \dots$$

avec c une constante universelle. Le résultat suit alors aisément. \square

2.3.10 Perturbation d'une rotation d'angle rationnel

Supposons que $\alpha \in \mathcal{B} \rightarrow p/q$ et que $f \in \mathcal{S}_\alpha \rightarrow R_{p/q}$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} . Alors $f^{\circ q} \rightarrow \text{Id}$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} . L'exemple qui suit montre que sans hypothèse supplémentaire, il est difficile de contrôler $r(f)$.

Exemple. Le polynôme quadratique $f : z \mapsto e^{2i\pi\alpha} z(1 + \varepsilon z)$ fixe 0 et

$$\frac{e^{-2i\pi\alpha} - 1}{\varepsilon} \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2i\pi\alpha}{\varepsilon}.$$

Si $\varepsilon \rightarrow 0$ moins vite que α , de sorte que $\alpha = o(\varepsilon)$, alors $f \rightarrow \text{Id}$ sur tout compact de \mathbb{C} mais $r(f) \rightarrow 0$.

Si $\alpha \in \mathcal{B}$ est suffisamment proche de p/q , alors p/q est une réduite p_m/q_m de α . Si $\alpha > p/q$, m est pair et si $\alpha < p/q$, m est impair. Dans les deux cas, on a $\alpha_m \rightarrow 0$ et si l'on note

$$a_{m+1} = \left\{ \frac{1}{\alpha_m} \right\}$$

le $m+1$ ème coefficient de la fraction continue de α , on a

$$a_{m+1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow p/q} +\infty.$$

Proposition 14

Si $\alpha \in \mathcal{B} \rightarrow p/q \in \mathbb{Q}$ et si

$$f \in \mathcal{S}_\alpha \rightarrow R_{p/q} \quad \text{et} \quad \frac{f^{\circ q} - R_\alpha^{\circ q}}{q\alpha - p} \rightarrow 0$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , alors

$$\liminf \beta_m \Phi(\alpha_{m+1}) + \log r(f) \geq 0$$

avec m l'entier tel que p/q est la m ème réduite de α .

Démonstration. La condition portant sur le q ème itéré de f implique que pour tout $\rho < 1$, si α est suffisamment proche de p/q , on peut définir un secteur \mathcal{U} délimité par le segment $[0, \rho]$, son image par $f^{\circ q}$ et une courbe joignant ρ à $f^{\circ q}(\rho)$ (un morceau de spirale logarithmique). Si l'on recolle $[0, \rho]$ à son image, on obtient une surface de Riemann \mathcal{V} . L'application de premier retour dans \mathcal{U} associée à f (et non à $f^{\circ q}$), induit une application holomorphe $g : \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}$ avec $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$. On peut identifier \mathcal{V} à D_S de sorte que $\mathbb{D}^* \subset \mathcal{V}'$. Les mêmes arguments que ceux exposés dans la preuve du lemme 2 montrent que pour tout $C > 1$ et tout $\rho < 1$, si α est suffisamment proche de p/q et si $|z| < \rho/C$, il existe $k > 0$ avec $f^{\circ k}(z) \in \mathcal{U}$; de plus, on a le contrôle suivant sur l'application canonique de \mathcal{U} dans \mathcal{V} :

$$(\forall Z \in \mathcal{U}) \quad \left(\frac{z}{\rho C} \right)^{1/\alpha} \leq |\chi(z)| \leq \left(\frac{Cz}{\rho} \right)^{1/\alpha}.$$

Le nombre de rotation de g est $-\alpha_{m+1}$. En reprenant les arguments exposés précédemment, on voit que pour tout $C > 1$ et tout $\rho < 1$, si α est suffisamment proche de p/q ,

$$\log r(f) \geq \log \frac{\rho}{C^2} - \beta_m (\Phi(\alpha_{m+1}) - C_0)$$

avec C_0 une constante universelle. En passant à la limite quand $\alpha \rightarrow p/q$, donc $\beta_m \rightarrow 0$, on obtient

$$\liminf \beta_m \Phi(\alpha_{m+1}) + \log r(f) \geq \log \rho - 2 \log C.$$

Le résultat suit en faisant tendre C et ρ vers 1. \square

2.3.11 Perturbation d'une application ayant un point parabolique

Proposition 15

Considérons une famille d'applications f_α dépendant analytiquement de α dans un voisinage de p/q . Supposons que

$$f_{p/q}^{\circ q}(z) = z + Az^{q+1} + O(z^{q+2}) \quad \text{avec } A \neq 0.$$

Alors,

$$\liminf_{\alpha \in \mathcal{B} \rightarrow p/q} \Phi(\alpha) + \log r(f_\alpha) \geq \Phi_{\text{trunc}}\left(\frac{p}{q}\right) + \log L_a(f_{p/q}^{\circ q}) + \frac{\log 2\pi}{q}.$$

Démonstration. Posons $\varepsilon = \alpha - p/q$. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a

$$f_\alpha^{\circ q}(z) = z + 2i\pi q \varepsilon z + Az^{q+1} + o(z^{q+1}) + o(\varepsilon z).$$

Si l'on fait le changement de variable $z = \varepsilon^{1/q} w$, l'application f_α est conjuguée à une application g_α dont le domaine mange tout compact de \mathbb{C} . On a

$$r(f_\alpha) = |\varepsilon|^{1/q} r(g_\alpha)$$

et

$$g_\alpha^{\circ q}(w) = w + \varepsilon w(2i\pi q + Aw^q) \cdot (1 + \delta(\alpha, w))$$

avec $\delta(\alpha, \cdot) \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de \mathbb{C} quand $\alpha \rightarrow p/q$. L'application $g_\alpha^{\circ q}$ est donc proche (à $o(q\alpha - p)$ près) du flot au temps ε du champ de vecteur

$$\xi := w(2i\pi q + Aw^q) \frac{d}{dw}.$$

Ce flot est conjugué à la rotation d'angle $q\varepsilon$ au voisinage de 0. Soit Ω le plus grand domaine où il y a conjugaison. La proposition 14 page précédente implique que

$$\liminf_{\alpha \rightarrow p/q} \beta_m \Phi(\alpha_{m+1}) + \log r(g_\alpha) \geq \log \text{rad}(\Omega)$$

avec m l'entier tel que p/q est la $m^{\text{ème}}$ réduite de α .

Le domaine Ω s'envoie par $w \mapsto \zeta := w^q$ sur le plus grand domaine de linéarisation du champ de vecteur

$$q\zeta(2i\pi q + A\zeta)\frac{d}{d\zeta}.$$

C'est le demi-plan contenant 0 délimité par la médiatrice du segment $[0, -2i\pi q/A]$. Le rayon conforme de ce demi-plan est $|2\pi q/A|$. On en déduit que

$$\text{rad}(\Omega) = \left| \frac{2\pi q}{A} \right|^{1/q}.$$

En revenant aux coordonnées z de départ, on a donc

$$\liminf_{\alpha \rightarrow p/q} \beta_m \Phi(\alpha_{m+1}) + \log r(f_\alpha) - \frac{1}{q} \log |\varepsilon| \geq \frac{1}{q} \log \left| \frac{2\pi q}{A} \right|.$$

Comme $\beta_m = q|\varepsilon|$ et $\beta_{m-1} \rightarrow 1/q$, on a $\alpha_m \sim |q^2\varepsilon|$ et

$$\beta_{m-1} \log \frac{1}{\alpha_m} - \frac{1}{q} \log |q^2\varepsilon| \xrightarrow{\alpha \rightarrow p/q} 0.$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \beta_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} \xrightarrow{\alpha \rightarrow p/q} \Phi_{\text{trunc}}(p/q).$$

Le résultat suit alors aisément. \square

Comme un polynôme quadratique $P_{p/q}$ n'a qu'un seul cycle de pétale, on a le corollaire suivant.

Corollaire 16

La fonction $\Upsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Upsilon(\alpha) := \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$ vérifie

$$(\forall p/q \in \mathbb{Q}) \quad \liminf_{\alpha \in \mathcal{B} \rightarrow p/q} \Upsilon(\alpha) \geq \Phi_{\text{trunc}}(p/q) + \log L_a(p/q) + \frac{\log 2\pi}{q}.$$

2.3.12 Minoration de $r(P_{\alpha'})$ quand $\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow \alpha \notin \mathcal{B}$ **Proposition 17**

Supposons $\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow \alpha \in \mathcal{PM}$ et $f \in \mathcal{O}_{\alpha'} \rightarrow f_0 \in \mathcal{O}_{\alpha}$ uniformément au voisinage de 0. Si $d_n \rightarrow 0^+$ est telle que f_0 n'a pas de point périodique de période $\leq q_n$ dans $D_{d_n} \setminus \{0\}$, alors

$$\liminf \Phi(\alpha') + \log r(f) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(\alpha) + \log d_n.$$

Démonstration. On choisit $\rho_0 = d_{n_1}$ avec n_1 grand. Quand $n_1 \rightarrow +\infty$, $d_{n_1} \rightarrow 0$. Donc, étant donné n_0 , si n_1 est suffisamment grand et si α' est suffisamment proche de α , les applications renormalisées f_1, f_2, \dots, f_{n_0} seront proches de rotations sur \mathbb{D} . On peut alors choisir $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n_0}$ proches de 1 et $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n_0}$ proches de 1. Puisque l'application f n'a pas de point périodique de période $\leq q_{n_1}$ dans $D_{\rho_0} \setminus \{0\}$, les applications renormalisées $f_{n_0+1}, f_{n_0+2}, \dots, f_{n_1}$ n'ont pas de point fixe dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. On peut donc prendre $C_n = 2$ et $\rho_n = c/\log(e/\alpha_n)$ pour $n_0 + 1 \leq n \leq n_1$ avec c une constante universelle. Ensuite, pour $n > n_1$, on peut prendre $C_n = 2$ et $\rho_n = c'\alpha_n$ avec c' une constante universelle. Alors,

$$\begin{aligned} \log r(f) &\geq \log d_{n_1} + o(1) - \sum_{k=n_0+1}^{n_1} \beta'_{k-1} \log \log \frac{e}{\alpha'_k} \\ &\quad - \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \beta'_{k-1} \log \frac{1}{\alpha'_k} - \beta'_{n_0} C_0 \end{aligned}$$

avec $o(1) \rightarrow 0$ quand $f \rightarrow f_0$ et C_0 une constante universelle. En ajoutant $\Phi(\alpha')$ des deux côtés et en faisant tendre f vers f_0 , on obtient

$$\liminf \Phi(\alpha') + \log r(f) \geq \log d_{n_1} + \Phi_{n_1}(\alpha) - \sum_{k=n_0+1}^{n_1} \beta_{k-1} \log \log \frac{e}{\alpha_k} - \beta_{n_0} C_0.$$

Puisque la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_{k-1} \log \log \frac{e}{\alpha_k}$ est convergente, on obtient le résultat en faisant d'abord tendre n_1 vers $+\infty$ puis n_0 vers $+\infty$. \square

Définition 4

Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $d_n(\alpha)$ la distance de 0 à l'ensemble des points périodiques non nuls de P_{α} de période $\leq q_n$.

Notons que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et si P_α n'est pas linéarisable, alors $d_n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
On a donc le corollaire suivant de la proposition 17 page précédente.

Corollaire 18

Si $\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow \alpha \in \mathcal{PM} \setminus \mathcal{B}$, alors

$$\liminf \Phi(\alpha') + \log r(P_{\alpha'}) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(\alpha) + \log d_n(\alpha).$$

Nous allons maintenant montrer un résultat analogue lorsque $\alpha \notin \mathcal{PM}$.

Proposition 19

Supposons que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est tel que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \beta_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n} > 0.$$

Alors,

$$\liminf \Phi(\alpha') + \log r(P_{\alpha'}) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(\alpha) + \log d_n(\alpha).$$

Démonstration. Soient p_n/q_n les réduites de α . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q_n} \log \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_{n-1} \log \alpha_n.$$

Par conséquent, il existe $\rho_0 < 1$ et une infinité de n tels que

$$\sqrt[n]{|\varepsilon_n|} < \rho_0 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n := \alpha - \frac{p_n}{q_n}.$$

On dit alors que p_n/q_n est une bonne réduite de α .

Notons que $\alpha \notin \mathcal{B}$ et donc, d'après la proposition 31 page 30, les fonctions d'explosions $\chi_n := \chi_{p_n/q_n}$ sont de la forme

$$\chi_n(\delta) = \chi'_n(0)\delta \cdot (1 + \eta_n(\delta))$$

avec $\eta_n \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} . Pour tout $\rho < 1$, si n est suffisamment grand et si α' est suffisamment proche de α , l'application χ_n est univalente au voisinage de D_ρ et l'application

$$f_{\alpha',n} := \chi_n^{-1} \circ P_{\alpha'} \circ \chi_n$$

est univalente au voisinage de D_ρ et prend ses valeurs dans \mathbb{D} . De plus, si p_n/q_n est une bonne réduite de α , alors c'est une bonne réduite de α' pour α' suffisamment proche de α :

$$\sqrt[q_n]{|\varepsilon'_n|} < \rho_0 \quad \text{avec} \quad \varepsilon'_n := \alpha - \frac{p_n}{q_n}.$$

L'application $f_{\alpha',n}$ coïncide avec la rotation d'angle p_n/q_n aux racines q_n èmes de ε'_n . Par conséquent, si p_n/q_n est une bonne réduite, si n est suffisamment grand et si α' est suffisamment proche de α ,

$$f_{\alpha',n}(z) = e^{2i\pi p_n/q_n} z (1 + (\varepsilon'_n - z^{q_n}) g_{\alpha',n}(z)) \quad \text{avec} \quad \sup_{D_\rho} |g_{\alpha',n}| \ll 1/\rho^{q_n}.$$

Si $\rho' < \rho$ et si n est suffisamment grand,

$$\sup_{z \in D_{\rho'}} |(\varepsilon'_n - z^{q_n}) g_{\alpha',n}(z)| \ll (\rho'/\rho)^{q_n} \ll 1/q_n.$$

Si p_n/q_n est une bonne réduite, si α' est suffisamment proche de α et si n est suffisamment grand, on peut donc itérer q_n fois $f_{\alpha',n}$ sur un disque de rayon arbitrairement proche de 1.

Comme $f_{\alpha',n}^{\circ q_n}$ fixe 0 avec multiplicateur $e^{2i\pi q_n \varepsilon'_n}$ et les racines q_n èmes de ε'_n avec le même multiplicateur en chaque racine, on a

$$f_{\alpha',n}^{\circ q_n}(z) = z + \frac{e^{2i\pi q_n \varepsilon'_n} - 1}{\varepsilon'_n} z (\varepsilon'_n - z^{q_n}) \cdot (1 + (\varepsilon'_n - z^{q_n}) h_{\alpha',n}(z) - \varepsilon'_n h_{\alpha',n}(0)).$$

De nouveau, on montre que pour tout $\rho < 1$, si p_n/q_n est une bonne réduite, si α' est suffisamment proche de α et si n est suffisamment grand, sur D_ρ ,

$$(\varepsilon'_n - z^{q_n}) h_{\alpha',n}(z) - \varepsilon'_n h_{\alpha',n}(0) \ll 1.$$

Le q_n ème itéré de $f_{\alpha'_n}$ est donc bien approché par le flot au temps 1 du champ de vecteur

$$\xi_{\alpha',n} := 2i\pi q_n z (\varepsilon'_n - z^{q_n}).$$

Pour tout $\rho < 1$, si l'on se restreint maintenant à un disque de rayon $\rho \sqrt[q_n]{|\varepsilon'_n|}$, ce flot est approché par la rotation d'angle $q_n \varepsilon'_n$ avec une erreur $o(q_n \varepsilon'_n)$. On conclut alors comme dans la proposition 14 page 46 que pour tout $\eta > 0$, si p_n/q_n est une bonne réduite de α et si n est suffisamment grand,

$$\liminf_{\alpha' \rightarrow \alpha} \log r(f_{\alpha'}) + \beta'_n \Phi(\alpha'_{n+1}) - \frac{1}{q_n} \log |\varepsilon'_n| \geq -\eta.$$

Notons que

$$\log r(P_{\alpha'}) = \log r(f_{\alpha',n}) + \log |\chi'_{p_n/q_n}(0)|.$$

De plus, si p_n/q_n est une bonne réduite de α et si n est suffisamment grand,

$$|\chi'_{p_n/q_n}(0)| \simeq \frac{\sqrt[q_n]{|\varepsilon'_n|}}{d_n(\alpha)}.$$

Par conséquent pour tout $\eta > 0$, si p_n/q_n est une bonne réduite de α et si n est suffisamment grand,

$$\liminf_{\alpha' \rightarrow \alpha} \log r(P_{\alpha'}) + \Phi(\alpha') \geq \Phi_n(\alpha) + \log d_n(\alpha) - \eta.$$

□

2.4 Majoration de $r(P_\alpha)$

Jean-Christophe Yoccoz [Y] a montré qu'il existe une constante C telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une application $f \in \mathcal{S}_\alpha$ avec $r(f) \leq Ce^{-\Phi(\alpha)}$. En combinant ce résultat avec le théorème 17 page 20 on obtient le théorème suivant.

Théorème 20

Il existe une constante C telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$r(P_\alpha) \leq Ce^{-\Phi(\alpha)}.$$

Dans cette partie, nous exposons une démonstration qui a été obtenue en collaboration avec Arnaud Chéritat. Nous obtenons un résultat un peu plus fort.

Définition 5

Pour tout irrationnel α et tout entier $n \geq 0$, on pose

$$X_n(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z \text{ est un point périodique de } P_\alpha \text{ de période } \leq q_n\}.$$

Théorème 21

Il existe une constante C telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$d(0, X_n(\alpha)) \leq Ce^{-\Phi_n(\alpha)}.$$

En particulier, nous retrouvons les résultats suivants :

- lorsque $\Phi(\alpha) = +\infty$, l'origine est accumulée par des points périodiques de P_α et donc P_α n'est pas linéarisable ;

- lorsque $\Phi(\alpha) < +\infty$, P_α a des points périodiques à distance $\leq Ce^{-\Phi(\alpha)}$ de l'origine et donc $r(P_\alpha) \leq Ce^{-\Phi(\alpha)}$.

2.4.1 Rayon conforme d'un domaine de \mathbb{C} contenant 0

Plutôt que de manipuler directement la distance de 0 à $X_n(\alpha)$, Arnaud Chéritat a eu l'idée de travailler avec une notion de rayon conforme de $\mathbb{C} \setminus X_n(\alpha)$ (qui n'est pas simplement connexe). Ici, nous proposons une variante de la définition utilisée par Arnaud Chéritat.

Définition 6

Si $U \subsetneq \mathbb{C}$ est un domaine contenant 0, on pose $\text{rad}(U) := \sup |\pi'(0)|$ avec $\pi : \mathbb{D} \rightarrow U$ holomorphe, $\pi(0) = 0$ et $\pi(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$.

Il est facile de voir que le supremum est atteint pour les fonctions $\pi : \mathbb{D} \rightarrow U$ telles que

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \mathbb{H} &\longrightarrow U \setminus \{0\} \\ Z &\longmapsto \pi(e^{2i\pi Z}) \end{aligned}$$

est un revêtement universel (\mathbb{H} est le demi-plan supérieur). En particulier, si U est un ouvert simplement connexe, $\text{rad}(U)$ est le rayon conforme usuel, c'est-à-dire, $\text{rad}(U) = |\pi'(0)|$ avec $\pi : \mathbb{D} \rightarrow U$ un isomorphisme qui fixe 0.

Notons que si $U \subset V$, alors $\text{rad}(U) \leq \text{rad}(V)$ avec égalité si, et seulement si, $U = V$. En particulier, si $U \subset D_r$, alors $\text{rad}(U) \leq r$.

Si $U := \mathbb{C} \setminus \{1\}$ la fonction modulaire $\lambda(\tau)$ est un revêtement universel $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow U$, et un lacet autour de 0 se relève en $\tau \mapsto \tau + 2$. D'après Lars V. Ahlfors [A], $\lim_{\text{Im}(\tau) \rightarrow +\infty} \lambda(\tau)e^{-i\pi\tau} = 16$ et donc $\text{rad}(\mathbb{C} \setminus \{1\}) = 16$. On en déduit que si $U \subsetneq \mathbb{C}$ est un domaine contenant 0,

$$d(0, \partial U) \leq \text{rad}(U) \leq 16 \cdot d(0, \partial U),$$

l'égalité de gauche étant obtenue lorsque U est un disque centré en 0, et celle de droite lorsque U est égal à \mathbb{C} moins un point.

En considérant le revêtement (non ramifié) $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ de degré q donné par $z \mapsto z^q$, on voit que si $U := \mathbb{C} \setminus \{z \mid z^q = w_0\}$ alors $\text{rad}(U) = \sqrt[q]{16|w_0|}$.

Si le supremum est atteint pour une application $\pi : \mathbb{D} \rightarrow U$, alors $\pi : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow U \setminus \{0\}$ est une isométrie pour les métriques de Poincaré. Le coefficient en $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ de la densité de Poincaré de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ est $-1/(|z| \log |z|)$. Le rayon conforme $\text{rad}(U)$ et la densité de la métrique de

Poincaré $\rho_U(z)dz$ de $U \setminus \{0\}$ sont donc reliés de la manière suivante : quand $z \rightarrow 0$,

$$\rho_U(z) = \frac{-1}{|z| \log |z|} \left(1 + \frac{\log \text{rad}(U)}{\log |z|} + o\left(\frac{1}{\log |z|}\right) \right).$$

Ce qui va nous intéresser, c'est de combien décroît le rayon conforme d'un domaine lorsqu'on en retire des points. Pour cela, on dispose du résultat suivant.

Proposition 22

Si $U, V \subseteq \mathbb{C}$ sont deux domaines contenant 0 et si $\chi : U \rightarrow V$ est une application holomorphe telle que $\chi(0) = 0$ et $\chi(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$, alors pour tout ensemble fini $S \subset U \setminus \{0\}$:

$$\frac{\text{rad}(V \setminus \chi(S))}{\text{rad}(V)} \leq \frac{\text{rad}(U \setminus S)}{\text{rad}(U)}.$$

Démonstration. On applique le lemme de Schwarz relatif ci-dessous à $X = U \setminus \{0\}$, $Y = V \setminus \{0\}$, $f = \chi$, $Y' = Y \setminus \chi(S)$ et $X' = \chi^{-1}(Y')$. On a

$$\frac{f^* \rho_Y}{\rho_X} \leq \frac{f^* \rho_{Y'}}{\rho_{X'}},$$

ce qui peut être écrit sous la forme

$$\frac{\rho_{X'}}{\rho_X} \leq \frac{f^* \rho_{Y'}}{f^* \rho_Y} = \frac{\rho_{Y'}}{\rho_Y} \circ f.$$

En considérant le comportement asymptotique en 0, et en utilisant la relation entre rayon conforme et densité de Poincaré, on obtient :

$$1 + \frac{1}{\log |z|} \cdot \log \frac{\text{rad}(X')}{\text{rad}(X)} + o\left(\frac{1}{\log |z|}\right) \leq 1 + \frac{1}{\log |z|} \cdot \log \frac{\text{rad}(Y')}{\text{rad}(Y)} + o\left(\frac{1}{\log |z|}\right)$$

et donc,

$$\frac{\text{rad}(Y')}{\text{rad}(Y)} \leq \frac{\text{rad}(X')}{\text{rad}(X)}.$$

Le résultat suit aisément. □

Il est bien connu qu'une application holomorphe $f : X \rightarrow Y$ entre deux surfaces de Riemann hyperboliques est contractante pour les métriques hyperboliques. Le lemme suivant montre que si l'on retire des points de Y et la préimage de ces points dans X , l'application est moins contractante.

Lemme 23 (Lemme de Schwarz relatif)

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann hyperboliques. Soit $Y' \subset Y$ un ouvert de Y et soit $X' = f^{-1}(Y')$. Alors, sur X' ,

$$\frac{f^* \rho_Y}{\rho_X} \leq \frac{f^* \rho_{Y'}}{\rho_{X'}} \leq 1.$$

Démonstration. La preuve est basée sur l'utilisation de métriques ultrahyperboliques (voir [A] section 1.5 pour la définition). Cela nous a été suggéré par Curtis T. McMullen.

Il suffit de montrer le résultat dans le cas où Y' est obtenu en retirant un point quelconque de Y . En effet, on obtient alors le résultat par récurrence lorsque Y' est obtenu en retirant un nombre fini de points de Y . Puis on obtient le résultat par passage à la limite si $Y' \subset Y$ est un ouvert quelconque. Considérons donc le cas où $y_0 \in Y$ est un point quelconque et $Y' = Y \setminus \{y_0\}$. On va montrer qu'alors que la métrique σ définie sur $X' = X \setminus f^{-1}\{y_0\}$ par

$$\sigma := \frac{f^* \rho_Y}{f^* \rho_{Y'}} \rho_{X'}$$

se prolonge continûment en une métrique ultrahyperbolique sur X . Comme la métrique de Poincaré est la plus grande des métriques ultrahyperboliques, on aura

$$\frac{f^* \rho_Y}{f^* \rho_{Y'}} \rho_{X'} = \sigma \leq \rho_X$$

ce qui donne le résultat voulu.

La métrique σ n'est a priori définie que sur $X' \setminus \mathcal{C}_f$, où \mathcal{C}_f est l'ensemble des points critiques de f . Mais puisque

$$\sigma = \left(\frac{\rho_Y}{\rho_{Y'}} \circ f \right) \cdot \rho_{X'},$$

on voit que σ est strictement positive et de classe C^2 sur X' . Sur $X' \setminus \mathcal{C}_f$ on a

$$\Delta \log \sigma = \Delta \log f^* \rho_Y + \Delta \log \rho_{X'} - \Delta \log f^* \rho_{Y'} = [f^* \rho_Y]^2 + [\rho_{X'}]^2 - [f^* \rho_{Y'}]^2.$$

La deuxième égalité vient du fait que les trois métriques ont courbure -1 . Puisque $Y' \subset Y$, on a $\rho_Y \leq \rho_{Y'}$ sur Y' , et donc, $f^* \rho_Y \leq f^* \rho_{Y'}$ sur X' . Et puisque, $f^* \rho_{Y'}$ est ultrahyperbolique sur X' , on a $f^* \rho_{Y'} \leq \rho_{X'}$ sur X' . On en déduit facilement

$$\Delta \log \sigma = [f^* \rho_Y]^2 + [\rho_{X'}]^2 - [f^* \rho_{Y'}]^2 \geq \left[\frac{f^* \rho_Y \cdot \rho_{X'}}{f^* \rho_{Y'}} \right]^2 = \sigma^2.$$

Puisque \mathcal{C}_f est discret dans X' , cette inégalité est valide sur X' . Par conséquent, σ est ultrahyperbolique sur X' .

Sur X' , on a $f^*\rho_{Y'} \leq \rho_{X'}$ et donc $\sigma \geq f^*\rho_Y$. En travaillant dans des cartes locales au voisinage des points de $X \setminus X'$, on montre que σ se prolonge continûment en ces points par $\sigma := f^*\rho_Y$. La métrique $f^*\rho_Y$ supporte donc la métrique σ aux points de $X \setminus X'$ et σ est une métrique ultrahyperbolique sur X . \square

2.4.2 Majoration de $\text{rad}(\mathbb{C} \setminus X_n(\alpha))$

Définition 7

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $n \geq 0$, posons

$$V_n(\alpha) := \mathbb{C} \setminus X_n(\alpha) \quad \text{et} \quad r_n(\alpha) := \text{rad}(V_n(\alpha)).$$

Pour montrer le théorème 21 page 52 il suffit de montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $r_n(\alpha) \leq Ce^{-\Phi_n(\alpha)}$.

Regardons ce qui se passe pour les premières valeurs de n . Si $\alpha_0 < 1/2$, $q_0 = 1$ et $q_1 \geq 2$. Dans ce cas, $X_0(\alpha)$ ne contient qu'un seul point : $e^{-2i\pi\alpha} - 1$. On montre aisément que

$$r_0(\alpha) = 16|e^{-2i\pi\alpha} - 1| < 32\pi e^{-\Phi_0(\alpha)}.$$

Si $\alpha_0 > 1/2$, $q_0 = q_1 = 1$ et $q_2 \geq 2$. Dans ce cas, $X_0(\alpha) = X_1(\alpha)$. On montre aisément que

$$r_0(\alpha) = r_1(\alpha) = 16|e^{-2i\pi\alpha} - 1| < 32\pi e^{-\Phi_1(\alpha)} < 32\pi e^{-\Phi_0(\alpha)}.$$

Passons maintenant de l'étape $n - 1$ à l'étape n . Nous pouvons pour cela supposer $q_n \geq 2$. Le résultat central est le suivant.

Proposition 24

Il existe une constante C (qui ne dépend ni de α ni de n) telle que

$$\log r_n(\alpha) - \log r_{n-1}(\alpha) \leq -\beta_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n} + C \frac{\log q_n}{q_n}. \quad (2.2)$$

Le théorème suit alors facilement puisque la somme des $(\log q_n)/q_n$ est uniformément majorée, indépendamment de α .

Démonstration. Pour passer de $V_{n-1}(\alpha)$ à $V_n(\alpha)$, on retire des points périodiques de période q_n . Par conséquent, $r_n(\alpha) \leq r_{n-1}(\alpha)$.

Si $|\alpha - p_n/q_n| > 1/(2q_n^4)$, la théorie des fractions continues donne :

$$0 \leq -\beta_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n} + 5 \frac{\log q_n}{q_n}$$

et dans ce cas, l'inégalité (2.2) est triviale.

Il suffit donc d'étudier le cas $|\alpha - p_n/q_n| < 1/(2q_n^4)$. La majoration de $\log r_n(\alpha) - \log r_{n-1}(\alpha)$ s'obtient en contrôlant un cycle particulier de période q_n de P_α :

$$\mathcal{C}(\alpha) := \chi_{p_n/q_n} \left\{ \sqrt[q_n]{\alpha - p_n/q_n} \right\}.$$

Nous allons majorer la perte de rayon conforme $\frac{\text{rad}(V_{n-1}(\alpha) \setminus \mathcal{C}(\alpha))}{\text{rad}(V_{n-1}(\alpha))}$.

Pour simplifier les notations, posons

$$p := p_n, \quad q := q_n, \quad \chi := \chi_{p/q} \quad \text{et} \quad B := D(\alpha, 1/(2q^3)).$$

De plus, pour $\alpha' \in B$, posons

$$X(\alpha') := \{z \in \mathbb{C}^* \mid z \text{ est un point périodique de } P_{\alpha'} \text{ de période } \leq q\}$$

et

$$V(\alpha') := \mathbb{C} \setminus X(\alpha').$$

Lemme 25

L'ensemble $X(\alpha')$ bouge holomorphiquement avec $\alpha' \in B$.

Démonstration. L'ensemble des paramètres $\alpha' \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'ensemble des points de période $\leq q$ ne bouge pas holomorphiquement est contenu dans $\bigcup_{q' \leq q} \mathcal{P}_{q'}$ (voir définition 7 page 27). On contrôle la distance

de α à cet ensemble via l'inégalité de Yoccoz comme pour le lemme 27 page 28. \square

Soit $\pi_\alpha : \mathbb{D} \rightarrow V(\alpha)$ une application qui ne s'annule qu'en 0 et vérifie $|\pi'_\alpha(0)| = \text{rad}(V(\alpha))$. Pour $\alpha' \in B$ on peut faire la construction suivante (qui n'est pas sans rappeler la construction du plongement de Bers des espaces de Teichmüller). Soit

1. $\psi : V(\alpha) \rightarrow V(\alpha')$ un homéomorphisme quasiconforme,
2. $\mu := \bar{\partial}\psi/\partial\psi$ la forme de Beltrami associée,
3. $\tilde{\mu}$ la forme de Beltrami qui est égale à $\pi_\alpha^* \mu$ sur \mathbb{D} et 0 hors de \mathbb{D} ,
4. $\tilde{\psi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'homéomorphisme quasiconforme qui intègre la forme $\tilde{\mu}$ normalisé par $\tilde{\psi}(0) = 0$ et $\tilde{\psi}(z) = z + O(1)$ quand $z \rightarrow \infty$,

5. $\tilde{V}(\alpha') := \tilde{\psi}(\mathbb{D})$ et
 6. $\pi_{\alpha'} : \tilde{V}(\alpha') \longrightarrow V(\alpha')$
 $z \longmapsto \psi \circ \pi_{\alpha} \circ \tilde{\psi}^{-1}(z).$

On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{D}, 0) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & (\tilde{V}(\alpha'), 0) \\ \pi_{\alpha} \downarrow & & \downarrow \pi_{\alpha'} \\ (V(\alpha), 0) & \xrightarrow{\psi} & (V(\alpha'), 0). \end{array}$$

Pour tout $\alpha' \in B$, l'application $\pi_{\alpha'} : \tilde{V}(\alpha') \setminus \{0\} \rightarrow V(\alpha') \setminus \{0\}$ est un revêtement holomorphe qui ne dépend pas du choix de ψ . L'application

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{\alpha' \in B} \alpha' \times (\tilde{V}(\alpha') \setminus \{0\}) & \longrightarrow & \bigcup_{\alpha' \in B} \alpha' \times (V(\alpha') \setminus \{0\}) \\ (\alpha', z) & \longmapsto & (\alpha', \pi_{\alpha'}(z)) \end{array}$$

est un revêtement analytique. De plus, comme $X(\alpha')$ bouge holomorphiquement, le bord de $\tilde{V}(\alpha')$ bouge holomorphiquement.

Posons

$$U := D_{1/(2q^4)^{1/q}} \quad \text{et} \quad S := \{\delta \in \mathbb{C} \mid p/q + \delta^q = \alpha\} \subset U.$$

Notons que $\chi(S) = \mathcal{C}(\alpha)$ et

$$(\forall \delta \in U) \quad \alpha(\delta) := \frac{p}{q} + \delta^q \in D(\alpha, 1/q^4) \subset B \subset D(p/q, 1/q^3).$$

L'application $\chi : U \rightarrow \mathbb{C}$ ne s'annule qu'en 0 et pour tout $\delta \in U$, $\chi(\delta)$ appartient à $V(\alpha(\delta))$. L'application $\chi : U \rightarrow \mathbb{C}$ se relève en une application holomorphe $\tilde{\chi} : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\tilde{\chi}(0) = 0$, $\tilde{\chi}(\delta) \neq 0$ pour $\delta \neq 0$ et

$$(\forall \delta \in U) \quad \tilde{\chi}(\delta) \in \tilde{V}(\alpha(\delta)) \quad \text{et} \quad \chi(\delta) = \pi_{\alpha(\delta)}(\tilde{\chi}(\delta)).$$

Lemme 26

Pour tout $\delta \in U$, on a

$$\tilde{V}(\alpha(\delta)) \subset D_{\rho} \quad \text{avec} \quad \log \rho := \frac{\log 16}{1 + q/2}.$$

Démonstration. D'après le théorème du 1/4 de Koebe, pour tout $\alpha' \in B$, $\tilde{V}(\alpha') \subset D_4$. De plus, le bord de $\tilde{V}(\alpha')$ bouge holomorphiquement dans $D_4 \setminus \{0\}$ quand α' varie dans B . Le résultat suit du lemme de Schwarz. \square

D'après la proposition 22 page 54, on a donc

$$\frac{\text{rad}(D_\rho \setminus \tilde{\chi}(S))}{\text{rad}(D_\rho)} \leq \frac{\text{rad}(U \setminus S)}{\text{rad}(U)}.$$

De plus, $\pi_\alpha : \tilde{V}(\alpha) \setminus \{0\} \rightarrow V(\alpha) \setminus \{0\}$ est un revêtement, et donc,

$$\frac{\text{rad}(\tilde{V}(\alpha) \setminus \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{C}(\alpha)))}{\text{rad}(V(\alpha) \setminus \mathcal{C}(\alpha))} = \frac{\text{rad}(\tilde{V}(\alpha))}{\text{rad}(V(\alpha))}.$$

Comme $\tilde{V}(\alpha) = \mathbb{D}$ et comme $\tilde{V}(\alpha) \setminus \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{C}(\alpha)) \subset D_\rho \setminus \tilde{\chi}(S)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\text{rad}(V(\alpha) \setminus \mathcal{C}(\alpha))}{\text{rad}(V(\alpha))} &\leq \text{rad}(D_\rho \setminus \tilde{\chi}(S)) \\ &\leq \frac{\text{rad}(U \setminus S)}{\text{rad}(U)} \text{rad}(D_\rho) \\ &\leq \sqrt[q]{16|\alpha - p/q|} \cdot \sqrt[q]{2q^4} \cdot \rho. \end{aligned}$$

En termes de logarithmes de rayon conforme, cela implique

$$\begin{aligned} \log r_n(\alpha) - \log r_{n-1}(\alpha) &\leq \frac{\log |\alpha - p_n/q_n|}{q_n} + \frac{\log 32}{q_n} + \frac{4 \log q_n}{q_n} + \frac{\log 16}{1 + q_n/2} \\ &\leq -\beta_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n} + C \frac{\log q_n}{q_n} \end{aligned}$$

pour une constante universelle C . □

2.5 La fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$

Les résultats établis dans les deux paragraphes précédents montrent que la fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$ est uniformément bornée sur l'ensemble des nombres de Brjuno :

$$(\exists C \in \mathbb{R}) (\forall \alpha \in \mathcal{B}) \quad |\Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)| \leq C. \quad (2.3)$$

Avec Arnaud Chéritat, nous avons montré le résultat suivant, conjecturé par Stefano Marmi [Ma].

Théorème 27

La fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$ se prolonge continûment à \mathbb{R} .

En fait, Marmi, Moussa et Yoccoz [MMY] ont fait la conjecture plus forte que la fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$ est hölderienne d'exposant $1/2$.

La fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$ n'est définie que sur l'ensemble \mathcal{B} des nombres de Brjuno. Commençons par définir un prolongement $\Upsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

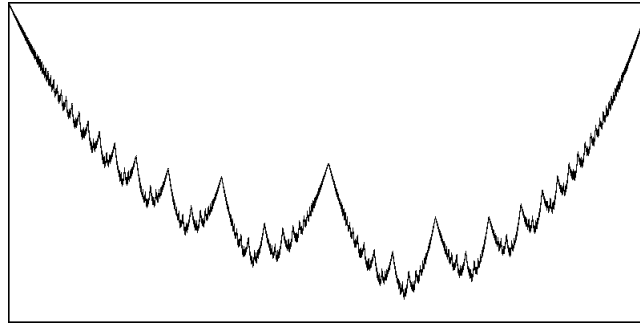


FIG. 2.2 – Le graphe de la fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$ avec $\alpha \in [0,1]$. L'intervalle image est $[0, \log(2\pi)]$.

2.5.1 La valeur de Υ aux nombres de Brjuno

Définition 8

Pour $\alpha \in \mathcal{B}$, on pose

$$\Upsilon(\alpha) = \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha).$$

2.5.2 La valeur de Υ aux nombres rationnels

Définition 9

Pour tout nombre rationnel p/q , on pose

$$\Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) = \Phi_{\text{trunc}}\left(\frac{p}{q}\right) + \log L_a\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{\log 2\pi}{q}.$$

2.5.3 La valeur de Υ aux nombres de Cremer

Nous dirons que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un nombre de Cremer si ce n'est pas un nombre de Brjuno.

Définition 10

Pour tout irrationnel α et tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\Phi_n(\alpha) = \sum_{k=0}^n \beta_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k}.$$

On reprend les notations de du paragraphe précédent : pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose

$$X_n(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z \text{ est un point périodique de } P_\alpha \text{ de période } \leq q_n\}$$

et

$$r_n(\alpha) := \text{rad}(\mathbb{C} \setminus X_n(\alpha)).$$

La suite $(r_n(\alpha))_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers $r(P_\alpha)$ quand $n \rightarrow +\infty$. En effet, si P_α n'est pas linéarisable, 0 est accumulé par des points périodiques de P_α . Puisque P_α est tangent à la rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a alors

$$r_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} d(0, X_n(\alpha)).$$

Si P_α est linéarisable, le disque de Siegel Δ_α est contenu dans $\mathbb{C} \setminus X_n(\alpha)$ pour tout $n \geq 0$ et le bord de Δ_α est accumulé par des points périodiques de P_α . On a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(\alpha) + \log r_n(\alpha) = \Upsilon(\alpha).$$

Théorème 28

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite

$$\Phi_n(\alpha) + \log r_n(\alpha)$$

est minorée et converge vers son infimum quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $n \geq 0$, on pose

$$u_n(\alpha) := \Phi_n(\alpha) + \log r_n(\alpha).$$

D'après la proposition 24 page 56, il existe une constante C telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et tout $n \geq 0$,

$$u_n(\alpha) - u_{n-1}(\alpha) \leq C \frac{\log q_n}{q_n}.$$

La série de terme général $(\log q_n)/q_n$ est convergente. La suite $u_n(\alpha)$ est donc essentiellement décroissante. Il suit immédiatement que

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\alpha) = \inf_{n \geq 0} u_n(\alpha).$$

Pour voir que cette limite est finie, il suffit d'observer que pour tout $n \geq 0$, $\alpha \mapsto u_n(\alpha)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Elle est minorée sur \mathcal{B} par $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$ qui est elle-même minorée indépendamment de $\alpha \in \mathcal{B}$. \square

Définition 11

Pour tout nombre de Cremer α , on pose

$$\Upsilon(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(\alpha) + \log r_n(\alpha).$$

Remarque. Cette définition est équivalente à

$$\Upsilon(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(\alpha) + \log d(0, X_n(\alpha)).$$

2.5.4 Continuité de Υ

Nous allons maintenant montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow \alpha} \Upsilon(\alpha') = \Upsilon(\alpha).$$

Cela suffit à montrer la continuité de Υ .

Lemme 29

La fonction Υ est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

$$\limsup_{\alpha' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \Upsilon(\alpha') \leq \Upsilon(\alpha).$$

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$\Upsilon(\alpha) = \inf_{n \geq 0} \Phi_n(\alpha) + \log r_n(\alpha)$$

avec $\alpha \mapsto \Phi_n(\alpha) + \log r_n(\alpha)$ continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

D'après le corollaire 10 page 43, Υ est semi-continue inférieurement sur \mathcal{B} :

$$\liminf_{\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow \alpha \in \mathcal{B}} \Upsilon(\alpha') \geq \Upsilon(\alpha).$$

On a donc

$$\lim_{\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow \alpha \in \mathcal{B}} \Upsilon(\alpha') = \Upsilon(\alpha),$$

ce qui règle le cas où α est un nombre de Brjuno.

Le lemme suivant est une conséquence des techniques d'implosion paraboliques qui permettent de contrôler la position d'un cycle de période q_{m+1} de $P_{\alpha'}$ pour α' proche de p/q et m l'entier tel que p/q est la $m^{\text{ème}}$ réduite de α' .

Lemme 30

Quand $\alpha' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow p/q$, on a

$$\limsup \Phi_{m+1}(\alpha') + \log r_{m+1}(\alpha') \leq \Upsilon(p/q).$$

avec m l'entier tel que p/q est la $m^{\text{ème}}$ réduite de α' .

Comme

$$\Upsilon(\alpha') \leq \Phi_{m+1}(\alpha') + \log r_{m+1}(\alpha'),$$

on a donc

$$\limsup_{\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow p/q} \Upsilon(\alpha') \leq \Upsilon(p/q).$$

D'après le corollaire 16 page 48, on a

$$\liminf_{\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow p/q} \Upsilon(\alpha') \geq \Upsilon(p/q).$$

Cela règle le cas où $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$.

Il ne reste plus qu'à étudier le cas où α est un nombre de Cremer. Ce qu'il nous faut montrer, c'est que

$$\liminf_{\alpha' \in \mathcal{B} \rightarrow \alpha} \Upsilon(\alpha') \geq \Upsilon(\alpha).$$

Si $\alpha \in \mathcal{PM}$, le résultat est donné par le corollaire 18 page 50. Si $\alpha \notin \mathcal{PM}$,

$$\sup_{k \geq 0} \beta_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} = +\infty.$$

Le résultat est donné par la proposition 19 page 50.

Chapitre 3

Ensembles de Julia d'aire strictement positive

Le résultat central de ce chapitre est l'existence d'ensemble de Julia de polynômes quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive. Pour faire plus court, nous parlerons d'aire. Dans l'un de ses mémoires, Pierre Fatou avait soulevé le problème de savoir ce que l'on pourrait dire de l'aire des ensembles de Julia. Pendant longtemps, la conjecture a été que l'aire de l'ensemble de Julia d'un polynôme serait toujours nulle. Il y a une vingtaine d'année, Adrien Douady ainsi que Thomas Nowicki et Sébastien van Strien ont réalisé qu'il en était autrement. Adrien Douady a alors initié un programme qu'Habib Jellouli a commencé à débroussailler. C'est dans ce cadre qu'il a démontré le lemme 22 page 26 qui est essentiel dans les résultats que nous utiliserons. C'est Arnaud Chéritat qui a fait la plus grande avancée. Après sa thèse, il n'y avait plus de doute concernant l'existence de polynômes quadratiques ayant un ensemble de Julia de mesure positive. Dans ce chapitre, nous présentons une preuve de ce résultat que nous avons obtenue en collaboration avec Arnaud Chéritat.

3.1 Disques de Siegel introvertis

Nous allons considérer une suite de nombres de Brjuno qui converge vers α . Nous noterons cette suite α_n (à ne pas confondre avec la suite définie par l'algorithme de Gauss que nous n'utiliserons pas dans ce paragraphe). Nous noterons p_k/q_k les réduites de α .

Dans tout ce paragraphe

$$\alpha := [a_0, a_1, \dots] \quad \text{et} \quad \theta := [0, t_1, \dots]$$

sont des nombres de Bruno et (α_n) est une suite de nombres de Brjuno convergeant vers α de la forme

$$\alpha_n := [a_0, a_1, \dots, a_n, A_n, t_1, t_2, \dots]. \quad (3.1)$$

Notons que pour $k \leq n$, les réduites p_k/q_k sont les mêmes pour α et pour α_n .

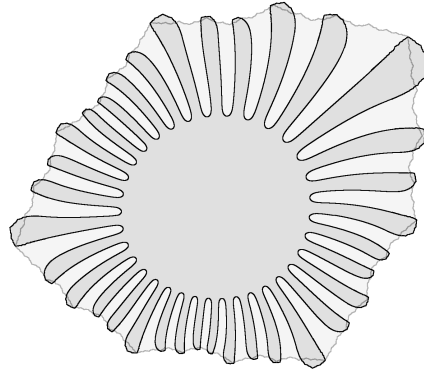


FIG. 3.1 – Superposition de deux disques de Siegel: Δ_α (en gris clair) et Δ_{α_n} (en gris foncé).

Théorème 1

Si

$$\alpha := [a_0, a_1, \dots] \quad \text{et} \quad \theta := [0, t_1, \dots]$$

sont des nombres de Bruno et si

$$\alpha_n := [a_0, a_1, \dots, a_n, A_n, t_1, t_2, \dots]$$

alors, pour tout ouvert $U \subset \Delta_\alpha$,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_U(\Delta_{\alpha_n}) \geq \frac{1}{2}.$$

Démonstration. On vérifie facilement que :

$$\Phi(\alpha_n) - \frac{1}{q_n} \log A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(\alpha).$$

En particulier, si $\sqrt[n]{A_n} \rightarrow 1$, $\Phi(\alpha_n) \rightarrow \Phi(\alpha)$ et $r(P_{\alpha_n}) \rightarrow r(P_\alpha)$. Dans ce cas, pour tout ouvert $U \subset \Delta_\alpha$,

$$\text{dens}_U(\Delta_{\alpha_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Nous pouvons donc à partir de maintenant supposer que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[q_n]{A_n} = A > 1.$$

Pour obtenir le résultat, nous allons contrôler la géométrie du disque de Siegel Δ_{α_n} .

Posons $\varepsilon_n := \alpha_n - p_n/q_n$. On montre facilement que

$$A_n = \left| \frac{1}{q_n^2 |\varepsilon_n|} \right|$$

et donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[q_n]{|\varepsilon_n|} = \frac{1}{A} < 1.$$

Pour $\rho < 1$, définissons

$$X_n(\rho) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \varepsilon_n} \in D_{s_n} \right\} \quad \text{avec} \quad s_n := \frac{\rho^{q_n}}{\rho^{q_n} + |\varepsilon_n|}.$$

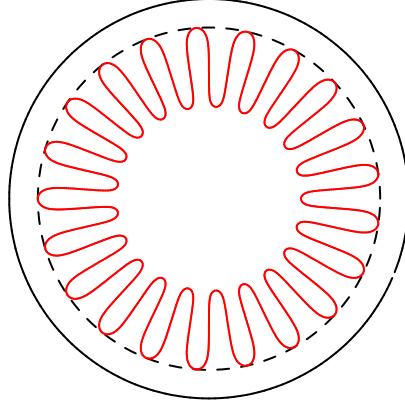


FIG. 3.2 – Le bord d'un ensemble $X_n(\rho)$.

Ce domaine est étoilé par rapport à 0, évite les racine $q_n^{\text{èmes}}$ de ε_n . Il est contenu dans le disque D_ρ , mais n'y est pas relativement compact. Pour tout ouvert U contenu dans D_ρ ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_U(X_n(\rho)) \geq \frac{1}{2}.$$

Puisque les valeurs d'adhérence de la suite $\chi_n : D_{r_n} \rightarrow \mathbb{C}$ sont des isomorphismes $\chi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta_\alpha$, le théorème est un corollaire de la proposition 2 ci-dessous. \square

Proposition 2

Supposons α_n définie par l'équation (3.1) avec $\liminf \sqrt[q_n]{A_n} > 1$. Pour tout $\rho < 1$, si n est assez grand, le disque de Siegel Δ_{α_n} contient $\chi_n(X_n(\rho))$.

Démonstration. Pour simplifier, nous supposons que n est pair. Dans ce cas, $\varepsilon_n > 0$ et $q_{n-1} \cdot (p_n/q_n) = -1/q_n \pmod{1}$.

Les valeurs d'adhérence de la suite $\chi_n : D_{r_n} \rightarrow \mathbb{C}$ sont des isomorphismes $\chi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta_\alpha$. Par conséquent, quand $n \rightarrow +\infty$, le domaine de l'application

$$f_n := \chi_n^{-1} \circ P_{\alpha_n} \circ \chi_n$$

mange tout compact de \mathbb{D} . Nous allons montrer que pour $\rho < 1$ et n suffisamment grand, le disque de Siegel de f_n contient $X_n(\rho)$. Cela démontrera la proposition.

Commençons par donner une interprétation dynamique de $X_n(\rho)$ et pour cela, considérons le champ de vecteurs

$$\xi_n := 2i\pi q_n z(\varepsilon_n - z^{q_n}) \frac{d}{dz}.$$

Ce champ de vecteur est tangent au bord de $X_n(\rho)$, qui est donc invariant par la dynamique (réelle) de ξ_n .

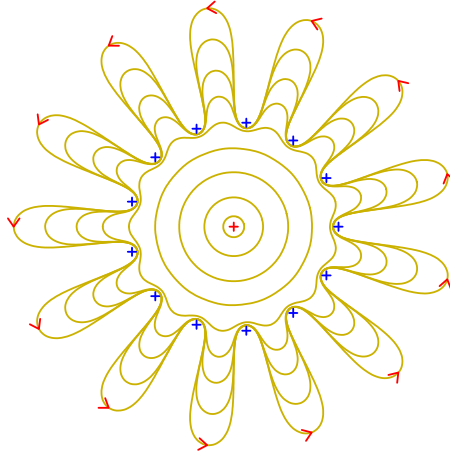


FIG. 3.3 – Quelques trajectoires réelles du champ de vecteur ξ_n ; les zéros du champ de vecteur sont indiqués.

Nous souhaitons comparer la dynamique de f_n et celle de ξ_n .

Notons que comme $p_n/q_n - \alpha = o(1/q_n)$ et $\alpha_n - \alpha = o(1/q_n)$, le lemme de Jellouli implique les domaines de $f_n^{\circ q_{n-1}}$ et de $f_n^{\circ q_n}$ mangent tout compact

de \mathbb{D} . Rappelons que nous travaillons sous l'hypothèse que n est pair, et donc que $q_{n-1} \cdot (p_n/q_n) = -1/q_n \pmod{1}$.

Lemme 3

On a

$$e^{2i\pi/q_n} f_n^{q_{n-1}}(z) = z + \xi_n(z) \cdot g_n(z)$$

et

$$(\forall \rho < 1) \quad \sup_{|z| \leq \rho} |g_n(z)| \leq B_n \quad \text{avec} \quad \sqrt[n]{B_n} \rightarrow 1.$$

Démonstration. L'application f_n coïncide avec la rotation d'angle p_n/q_n sur l'ensemble des racines q_n èmes de ε_n et $q_{n-1} \cdot (p_n/q_n) = -1/q_n \pmod{1}$. Par conséquent, $e^{2i\pi/q_n} f_n^{q_{n-1}}(z)$ fixe 0 et les racines q_n èmes de ε_n . Cela montre que $e^{2i\pi/q_n} f_n^{q_{n-1}}$ peut s'écrire sous la forme requise. L'estimée sur le module de g_n suit du fait que $(\varepsilon_n - z^{q_n})g_n(z) \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , car $e^{2i\pi/q_n} f_n^{q_{n-1}}$ est à valeurs dans \mathbb{D} . \square

Lemme 4

On a

$$f_n^{q_n}(z) = z + \xi_n(z) \cdot (1 + \eta_n + (\varepsilon_n - z^{q_n})h_n(z))$$

avec

$$|\eta_n| \leq B_n \cdot |\varepsilon_n| \quad \text{et} \quad (\forall \rho < 1) \quad \sup_{|z| \leq \rho} |h_n(z)| \leq B_n \quad \text{avec} \quad \sqrt[n]{B_n} \rightarrow 1.$$

Démonstration. L'application $f_n^{q_n}$ fixe 0 avec multiplicateur $e^{2i\pi q_n \varepsilon_n}$ et les racines q_n èmes de ε_n avec le même multiplicateur en chaque racine. Elle est donc de la forme requise avec

$$e^{2i\pi q_n \varepsilon_n} = 1 + 2i\pi q_n \varepsilon_n (1 + \eta_n + \varepsilon_n h_n(0)),$$

(la dérivée de $f_n^{q_n}$ aux racines q_n èmes de ε_n étant égale à $1 - 2i\pi q_n^2 \varepsilon_n (1 + \eta_n)$). Quand $n \rightarrow +\infty$, $2i\pi q_n \varepsilon_n \rightarrow 0$, et donc

$$\eta_n = \frac{e^{2i\pi q_n \varepsilon_n} - 1}{2i\pi q_n \varepsilon_n} - 1 - \varepsilon_n h_n(0) = \varepsilon_n \cdot (-h_n(0) + O(q_n)).$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$(\forall \rho < 1) \quad \sup_{|z| \leq \rho} |h_n(z)| \leq B_n \quad \text{avec} \quad \sqrt[n]{B_n} \rightarrow 1.$$

Cela suit du fait que $|z^{2q_n} h_n(z)| \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , car $f_n^{q_n}$ est à valeurs dans \mathbb{D} . \square

Corollaire 5

On a

$$f_n^{\circ q_n}(z) = z + \xi_n(z) \cdot k_n(z)$$

avec $k_n \rightarrow 1$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} .

Il est donc raisonnable de penser à $f_n^{\circ q_n}$ comme à une perturbation du flot au temps 1 du champ de vecteur ξ_n . Pour comparer la dynamique de f_n et celle de ξ_n , nous allons estimer le temps complexe pour passer de z à $e^{2i\pi/q_n} f_n^{\circ q_{n-1}}(z)$ et à $f_n^{\circ q_n}(z)$ en suivant le champ de vecteur ξ_n . C'est l'objet des deux lemmes qui suivent.

Lemme 6Quand $n \rightarrow +\infty$, le domaine de la fonction

$$v_n(z) := \int_{[z, e^{2i\pi/q_n} f_n^{\circ q_{n-1}}(z)]} \frac{1}{\xi_n}$$

mange tout compact de \mathbb{D} . De plus,

$$(\forall \rho < 1) \quad \sup_{|z| \leq \rho} |v_n(z)| \leq B_n \quad \text{avec} \quad \sqrt[q_n]{B_n} \rightarrow 1.$$

Démonstration. D'après le lemme 3 page précédente,

$$e^{2i\pi/q_n} f_n^{\circ q_{n-1}}(z) - z = \xi_n(z) \cdot g_n(z)$$

et

$$(\forall \rho < 1) \quad \sup_{|z| \leq \rho} |g_n(z)| \leq B_n \quad \text{avec} \quad \sqrt[q_n]{B_n} \rightarrow 1.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, si

$$|w - z| \leq |\xi_n(z) \cdot g_n(z)|,$$

alors

$$\left| \frac{\xi_n(w)}{\xi_n(z)} - 1 \right| \leq |g_n(z)| \cdot \sup_{\zeta \in [z, w]} |\xi_n'(\zeta)|.$$

Si $\rho < \rho' < 1$ et si $z \in D_\rho$, alors $w \in D_{\rho'}$ pour n suffisamment grand, car $\xi_n(z) \cdot g_n(z) \rightarrow 0$ uniformément sur D_ρ . On a

$$\sup_{z \in D_\rho} |g_n(z)| \cdot \sup_{\zeta \in D_{\rho'}} |\xi_n'(\zeta)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le champ de vecteur ξ_n ne s'annule donc pas sur le segment I_z reliant z à $e^{2i\pi/q_n} f_n^{\circ q_{n-1}}(z)$ et $v_n(z)$ est bien défini. De plus,

$$|v_n(z)| \leq |\xi_n(z) \cdot g_n(z)| \cdot \sup_{\zeta \in I_z} \left| \frac{1}{\xi_n(\zeta)} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |g_n(z)|.$$

Cela donne la majoration annoncée de v_n . \square

Lemme 7

Quand $n \rightarrow +\infty$, le domaine de la fonction

$$u_n(z) := \int_{[z, f_n^{\circ q_n}(z)]} \frac{1}{\xi_n}$$

mange tout compact de \mathbb{D} . De plus, pour tout $\rho < 1$, on a

$$(\forall z \in D_\rho) \quad |u_n(z) - 1| \leq B_n \cdot (|\varepsilon_n| + |z|^{q_n}) \quad \text{avec} \quad \sqrt[q_n]{B_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Démonstration. La même démonstration que précédemment en remplaçant la fonction g_n par la fonction k_n du corollaire 5 page précédente montre que le domaine de u_n mange tout compact de \mathbb{D} . De plus, d'après l'inégalité de la moyenne,

$$\begin{aligned} |u_n(z) - k_n(z)| &\leq |\xi_n(z) \cdot k_n(z)| \cdot \sup_{\zeta \in [z, f_n^{\circ q_n}(z)]} \left| \frac{1}{\xi_n(\zeta)} - \frac{1}{\xi_n(z)} \right| \\ &\leq |k_n(z)|^2 \cdot \sup_{\zeta \in [z, f_n^{\circ q_n}(z)]} |\xi_n'(\zeta)|. \end{aligned}$$

La majoration de $|u_n(z) - 1|$ suit en utilisant le lemme 4 page 68 qui permet de majorer $k_n(z) - 1$. \square

Nous devons montrer que pour tout $\rho < 1$, si n suffisamment grand, $X_n(\rho)$ est contenu dans le disque de Siegel Δ_{α_n} . Il suffit pour cela de montrer que pour toute suite $z_n \in X_n(\rho)$, si n est suffisamment grand, l'orbite de z_n sous itération de f_n est infinie, ou, ce qui revient au même, qu'il existe une suite de composées de $f_n^{\circ q_{n-1}}$ et de $f_n^{\circ q_n}$ pour laquelle l'orbite de z_n est infinie. Nous allons utiliser les techniques de renormalisation de Douady-Ghys-Yoccoz. Pour cela, nous allons travailler dans des coordonnées qui redressent le champ de vecteur ξ_n .

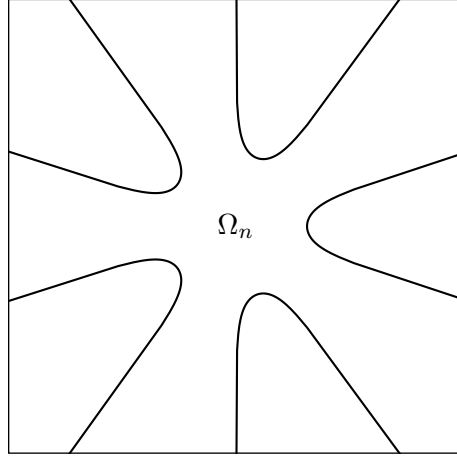
Considérons d'abord l'ouvert

$$\Omega_n := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \varepsilon_n} \in \mathbb{D} \right\}$$

qui est invariant par le flot réel du champ de vecteur ξ_n .

L'application

$$\begin{aligned} \Omega_n &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \varepsilon_n} \end{aligned}$$

FIG. 3.4 – Un exemple d'ouvert Ω_n

est un revêtement ramifié de degré q_n , ramifié en 0. Il y a donc un isomorphisme $\psi_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{D}$ tel que

$$(\psi_n(z))^{q_n} = \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \varepsilon_n}.$$

On note $\varphi_n : \mathbb{D} \rightarrow \Omega_n$ son inverse et $\pi_n : \mathbb{H} \rightarrow \Omega_n \setminus \{0\}$ (\mathbb{H} est le demi-plan supérieur) le revêtement universel défini par

$$\pi_n(Z) := \varphi_n(e^{2i\pi q_n \varepsilon_n Z}).$$

On a alors

$$\pi_n^* \xi_n = \frac{dz}{dz}.$$

La préimage de $X_n(\rho)$ est le demi-plan

$$\mathbb{H}_n(\rho) := \{Z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(Z) > \tau_n(\rho)\} \quad \text{avec} \quad \tau_n(\rho) := \frac{1}{2\pi q_n^2 \varepsilon_n} \log \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{\rho^{q_n}} \right).$$

Définissons maintenant des applications F_n et G_n par

$$F_n(Z) := Z + u_n(\pi_n(Z)) \quad \text{et} \quad G_n(Z) = Z + v_n(\pi_n(Z)) - \frac{1}{q_n^2 \varepsilon_n}.$$

Étant donné que les domaines de u_n et v_n mangent tout compact de \mathbb{D} , pour tout $\rho < 1$, si n est assez grand, les domaines de F_n et G_n contiennent $\mathbb{H}_n(\rho)$. De plus, les estimées sur le module de u_n et de v_n montrent que pour tout $\rho < \rho' < 1$, si n est assez grand, les restrictions de F_n et G_n à $\mathbb{H}_n(\rho)$ sont à valeurs dans $\mathbb{H}_n(\rho')$.

Étant donné que $u_n(\pi_n(Z))$ est le temps complexe pris pour passer de $\pi_n(Z)$ à $f_n^{\circ q_n} \circ \pi_n(Z)$ en suivant le champ de vecteurs ξ_n , pour $\rho < \rho' < 1$ et pour n suffisamment grand, l'application $F_n : \mathbb{H}_n(\rho) \rightarrow \mathbb{H}_n(\rho')$ relève l'application $f_n^{\circ q_n} : X_n(\rho) \rightarrow X_n(\rho')$:

$$\pi_n \circ F_n = f_n^{\circ q_n} \circ \pi_n.$$

Étant donné que la rotation d'angle $-1/q_n$ se relève en la translation $Z \mapsto Z - 1/(q_n^2 \varepsilon_n)$ et puisque $v_n(\pi_n(Z))$ est le temps complexe pris pour passer de $\pi_n(Z)$ à $e^{2i\pi/q_n} f_n^{\circ q_{n-1}} \circ \pi_n(Z)$ en suivant le champ de vecteurs ξ_n , l'application $G_n : \mathbb{H}_n(\rho) \rightarrow \mathbb{H}_n(\rho')$ relève l'application $f_n^{\circ q_{n-1}} : X_n(\rho) \rightarrow X_n(\rho')$:

$$\pi_n \circ G_n = f_n^{\circ q_{n-1}} \circ \pi_n.$$

Nous souhaitons maintenant contrôler les itérés de F_n pour un nombre de coup de l'ordre de $A_n = \lfloor 1/(q_n^2 \varepsilon_n) \rfloor$. Ce nombre est très grand et le contrôle est donc délicat. Pour cela, nous disposons du lemme suivant.

Lemme 8

Supposons que $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie

$$|F(Z) - Z - 1| < k(\operatorname{Re}(Z))$$

avec $k : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1/10[$ une fonction telle que $\log k$ est 1/2-Lipschitzienne. Soit Γ le graphe d'une primitive de $-2k$. Alors, tout point $Z \in \mathbb{H}$ qui se trouve au dessus de Γ a une image au dessus de Γ .

Démonstration. Soit K la primitive dont Γ est le graphe. Supposons par l'absurde qu'il existe un point $Z = X + iY$ avec $Y > K(X)$ dont l'image $F(Z) = X' + iY'$ vérifie $Y' < K(X')$. Alors,

$$0 < K(X) - K(X') < Y - Y' < k(X) \quad \text{et} \quad X' - X > 1 - k(X) > \frac{9}{10}.$$

Par conséquent, il existe $X'' \in [X, X'] \subset [X, X + 11/10]$ tel que

$$2k(X'') = \frac{K(X) - K(X')}{X' - X} < \frac{10}{9}k(X).$$

Or,

$$\log \frac{k(X)}{k(X'')} < \frac{1}{2}(X'' - X) < \frac{11}{20} < \log \frac{9}{5}.$$

D'où une contradiction. □

D'après le lemme 7 page 70, pour tout $\rho < 1$ et tout $Z \in \mathbb{H}_n(\rho)$,

$$|F_n(Z) - Z - 1| \leq B_n(\varepsilon_n + |\pi_n(Z)|^{q_n}) \quad \text{avec} \quad \sqrt[q_n]{B_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Posons $T_n := 1/(q_n^2 \varepsilon_n)$. On a

$$(\pi_n(Z))^{q_n} = \varepsilon_n \frac{e^{2i\pi Z/T_n}}{1 + e^{2i\pi Z/T_n}}.$$

Par conséquent, pour tout $\rho < 1$ et tout $Z \in \mathbb{H}_n(\rho)$,

$$|F_n(Z) - Z - 1| \leq k_n(\operatorname{Re}(Z))$$

avec k_n la fonction T_n -périodique définie par

$$k_n(X) := B_n \varepsilon_n \left(1 + \frac{1}{|1 + s_n e^{2i\pi X/T_n}|} \right) \quad \text{avec} \quad s_n = \frac{\rho^{q_n}}{\rho^{q_n} + \varepsilon_n}.$$

Pour n suffisamment grand, k_n vérifie les hypothèses du lemme 8. Si K_n est une primitive de $-2k_n$, sur chaque intervalle de longueur T_n , la fonction K_n décroît de

$$2 \int_0^{T_n} k_n(t) dt = \mathcal{O}(B_n).$$

Ces considérations amène le lemme central qui suit.

Lemme 9

Pour tout $\rho < \rho' < 1$, si n est suffisamment grand, alors pour tout $Z \in \mathbb{H}_n(\rho)$ il existe un entier k tel que $W := F_n^{\circ k} \circ G_n(Z) \in \mathbb{H}_n(\rho')$ et $\operatorname{Re}(W) > \operatorname{Re}(Z)$.

Nous pouvons maintenant utiliser les techniques de renormalisation de Douady-Ghys-Yoccoz. Supposons

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < 1 \quad \text{et} \quad Z_n = X_n + iY_n \in \mathbb{H}_n(\rho_1).$$

Si n est suffisamment grand, on peut définir une demi-bande \mathcal{U}_n dont le bord est la réunion de

$$\ell := \{X_n + it \mid t \geq \tau_n(\rho_3)\}, \quad F_n(\ell)$$

et le segment reliant $X_n + i\tau_n(\rho_3)$ à son image par F_n . La surface de Riemann \mathcal{V}_n obtenue en recollant $Z \in \ell$ avec $F_n(Z) \in F_n(\ell)$ est un cylindre isomorphe à un disque épointé.

Si n est suffisamment grand, pour tout $Z \in \mathcal{U}_n \cap \mathbb{H}_n(\rho_2)$, il existe un entier k tel que $W := F_n^{\circ k} \circ G_n(Z)$ appartient à \mathcal{U}_n . L'application $Z \mapsto W$ induit une application univalente $g_n : \mathcal{V}'_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ avec $\mathcal{V}'_n \subset \mathcal{V}_n$.

On identifie \mathcal{V}_n à $D_{R_n} \setminus \{0\}$ de sorte de l'image de Z_n soit 1. L'application g_n se prolonge en 0 qu'elle fixe avec dérivée $e^{-2i\pi\theta}$, où θ est le nombre de Brjuno (indépendant de n) qui a été utilisé dans la définition de la suite (α_n) . Quand $n \rightarrow +\infty$, $R_n \rightarrow +\infty$ et g_n converge vers la rotation d'angle θ uniformément sur tout compact de \mathbb{C} . Par conséquent, le disque de Siegel de g_n mange tout compact de \mathbb{C} et pour n suffisamment grand, l'orbite de 1 sous itération de g_n est infinie.

On voit donc que si $\rho < 1$, si (z_n) est une suite de points de $X_n(\rho)$ et si (Z_n) est une suite de points de $\mathbb{H}_n(\rho)$ tels que $\pi_n(Z_n) = z_n$, alors il existe une suite de composées de G_n et F_n pour laquelle l'orbite de Z_n est infinie. Il existe donc une suite de composées de $f_n^{\circ q_{n-1}}$ et de $f_n^{\circ q_n}$ pour laquelle l'orbite de z_n est infinie. Cela montre que $X_n(\rho)$ est contenu dans le disque de Siegel de f_n . \square

3.2 Contrôle d'ensembles postcritiques

Définition 1

Pour $N \geq 1$, on appelle \mathcal{C}_N l'ensemble des irrationnels de type constant pour lesquels tous les coefficients de la fraction continue sont supérieurs ou égaux à N .

Notons que $\mathcal{C}_{N+1} \subset \mathcal{C}_N \subset \dots \subset \mathcal{C}_1$. L'ensemble \mathcal{C}_1 est l'ensemble des nombres de type constant. Si $\alpha \in \mathcal{C}_1$, le polynôme P_α a un disque de Siegel bordé par un quasicerle passant par le point critique.

Théorème 10

Il existe N tel que si $\alpha_n \in \mathcal{C}_N \rightarrow \alpha \in \mathcal{C}_N$, alors pour tout $\delta > 0$, si n est assez grand, le disque de Siegel de P_{α_n} est contenu dans le δ -voisinage du disque de Siegel de P_α .

La preuve repose sur des résultats d'Inou et Shishikura [Sh] que nous commençons par rappeler. On considère le polynôme cubique $P(z) = z(1+z)^2$. Ce polynôme a un point fixe multiple en 0, un point critique en $-1/3$ qui s'envoie sur $-4/27$, et un deuxième point critique en -1 qui s'envoie sur 0. Dans toute la suite $R = e^{4\pi}$ et $v = -4/27$. Soit U l'ouvert défini par $U := P^{-1}(D(0, |v|R)) \setminus (]-\infty, -1] \cup B)$, où B est la composante connexe de $P^{-1}(D(0, |v|R))$ qui contient -1 . Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on considère

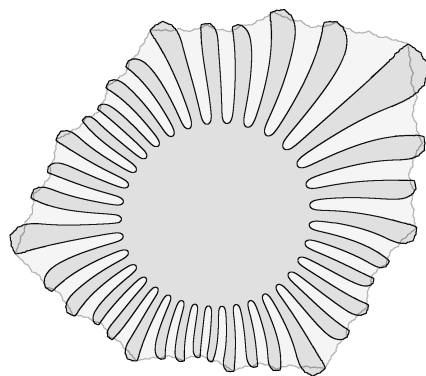


FIG. 3.5 – Superposition de deux disques de Siegel: Δ_α (en gris clair) et Δ_{α_n} (en gris foncé).

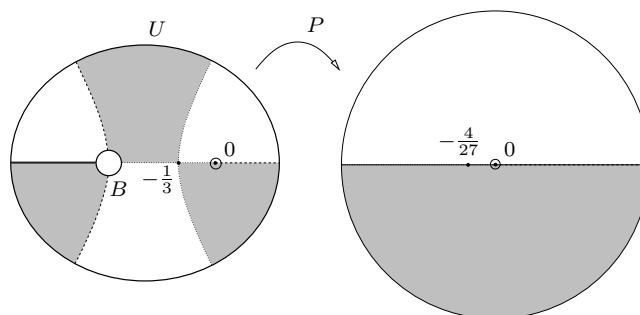


FIG. 3.6 – Une représentation schématique de l'ensemble U . On a colorié en gris les points dont l'image par P est contenue dans le demi-plan inférieur.

la classe

$$\mathcal{F}_\alpha := \left\{ f = P \circ \varphi^{-1} : U_f \rightarrow \mathbb{C} \text{ avec } \begin{array}{l} \varphi : U \rightarrow U_f \text{ isomorphisme tel que} \\ \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi'(0) = e^{-2i\pi\alpha} \end{array} \right\}.$$

Remarque. L'ensemble \mathcal{F}_α s'identifie à l'espace \mathcal{S}_α des applications univalentes dans le disque unité fixant 0 avec dérivée $e^{-2i\pi\alpha}$, qui est compact.

Une application $f \in \mathcal{F}_\alpha$ fixe 0 avec multiplicateur $e^{2i\pi\alpha}$. L'application $f : U_f \rightarrow D(0, |v|R)$ est surjective. Ce n'est pas un revêtement ramifié. L'application f a une valeur critique en $v = -4/27$.

Théorème 11 (Inou–Shishikura [Sh])

Tout $f \in \mathcal{F}_0$ a un point fixe en 0 de multiplicité 2. Il existe un pétale attractif $\mathcal{P}_{\text{attr},f}$ et une coordonnée de Fatou $\Phi_{\text{attr},f} : \mathcal{P}_{\text{attr},f} \rightarrow \mathbb{C}$ tels que :

1. $v \in \mathcal{P}_{\text{attr},f}$, $\Phi_{\text{attr},f}(v) = 1$ et $\Phi_{\text{attr},f}(\mathcal{P}_{\text{attr},f}) = \{Z ; \text{Re}(Z) > 0\}$;
2. si on pose

$$V_f := \{z \in \mathcal{P}_{\text{attr},f} \mid \text{Im}(\Phi_{\text{attr},f}(z)) > 0 \text{ et } 0 < \text{Re}(\Phi_{\text{attr},f}(z)) < 2\}$$

et

$$W_f := \{z \in \mathcal{P}_{\text{attr},f} \mid |\text{Im}(\Phi_{\text{attr},f}(z))| < 2 \text{ et } 0 < \text{Re}(\Phi_{\text{attr},f}(z)) < 2\},$$

alors, pour tout $f \in \mathcal{F}_0$ et pour tout $k > 0$,

- l'unique composante connexe V_f^{-k} de $f^{-k}(V_f)$ qui contient 0 dans son adhérence est relativement compacte dans U_f et $f^k : V_f^{-k} \rightarrow V_f$ est un isomorphisme et
- l'unique composante connexe W_f^{-k} de $f^{-k}(W_f)$ qui intersecte V_f^{-k} est relativement compacte dans U_f et $f^k : W_f^{-k} \rightarrow W_f$ est un revêtement de degré 2 ramifié au dessus de v .

Il suit alors facilement de la compacité de \mathcal{F}_0 qu'il existe des entiers k_0 , $k_1 \leq k_0 - 2$ et N tel que si $0 < \alpha < 1/N$, alors pour tout $f \in \mathcal{F}_\alpha$, on peut définir un pétale perturbé \mathcal{P}_f (perturbation de la réunion des pétales attractifs et répulsifs) et une coordonnée de Fatou perturbée $\Phi_f : \mathcal{P}_f \rightarrow \mathbb{C}$ avec

1. $v \in \mathcal{P}_f$, $\Phi_f(v) = 1$, $\Phi_f(\mathcal{P}_f) = \{Z \in \mathbb{C} ; 0 < \text{Re}(Z) < [1/\alpha] - k_1\}$ et $\text{Im}(\Phi_f(z)) \rightarrow +\infty$ quand $z \in \mathcal{P}_f \rightarrow 0$;

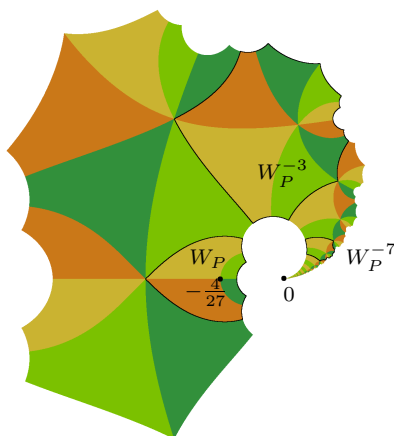


FIG. 3.7 – L'ouvert W_P et la réunion des W_P^{-k} . On a marqué le bord des pièces W_P , W_P^{-3} et W_P^{-7} . Pour une application $f \in \mathcal{F}_0$, la réunion de W_f et de ses préimages par f aura une structure similaire.

2. si V_f et W_f sont définis comme dans le théorème 11 page précédente, alors pour $0 \leq k \leq k_0$

- l'unique composante connexe V_f^{-k} de $f^{-k}(V_f)$ qui contient 0 dans son adhérence est relativement compacte dans U_f et

$$f^k : V_f^{-k} \rightarrow V_f$$

est un isomorphisme,

- l'unique composante connexe W_f^{-k} de $f^{-k}(W_f)$ qui intersecte V_f^{-k} est relativement compacte dans U_f et $f^k : W_f^{-k} \rightarrow W_f$ est un revêtement de degré 2 ramifié au dessus de v et
3. $V_f^{-k_0} \cup W_f^{-k_0} \subset \{z \in \mathcal{P}_f ; 2 < \operatorname{Re}(\Phi_f(z)) < [1/\alpha] - k_1 - 2\}$.

Inou et Shishikura obtiennent alors aisément le

Théorème 12 (Inou-Shishikura [Sh])

Si $f \in \mathcal{F}_\alpha$ avec $0 < \alpha < \frac{1}{N}$, l'application

$$\Phi_f \circ f^{k_0} \circ \Phi_f^{-1} : \Phi_f(V_f^{-k_0} \cup W_f^{-k_0}) \rightarrow \Phi_f(V_f \cup W_f)$$

se projette via $Z \mapsto z = -\frac{4}{27}e^{2i\pi Z}$ en une application $\mathcal{R}(f) \in \mathcal{F}_{-1/\alpha}$.

La construction que nous venons de décrire fonctionne également pour les polynômes quadratiques P_α avec $\alpha > 0$ suffisamment proche de 0 (la seule différence étant que la valeur critique du polynôme P_α n'est pas normalisée en $-4/27$). Dans toute la suite, N est choisi suffisamment grand pour qu'une application f qui est soit un polynôme P_α , soit un élément de \mathcal{F}_α , admette une renormalisée $\mathcal{R}(f) \in \mathcal{F}_{-1/\alpha}$.

Étant donné $\alpha \in \mathcal{C}_N$, on peut définir une suite infinie de renormalisées par

$$f_0 := P_\alpha \quad \text{et} \quad f_{j+1} := s \circ \mathcal{R}(f_j) \circ s^{-1},$$

la conjugaison par $s : z \mapsto \bar{z}$ étant introduite pour que le nombre de rotation en 0 soit ≥ 0 . Nous allons d'abord définir une suite d'ouverts U_j contenant l'ensemble post-critique de P_α .

Pour $j \geq 0$, on pose

$$\varphi_j := -\frac{4}{27}s \circ \exp \circ 2i\pi\Phi_{f_j}.$$

Si N est suffisamment grand, on peut définir une branche inverse ψ_j de φ_{j-1} sur le pétale perturbé \mathcal{P}_{f_j} à valeurs dans $\mathcal{P}_{f_{j-1}}$ (il y a plusieurs choix possibles). L'application

$$\Psi_j := \psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_j$$

est alors univalente sur \mathcal{P}_{f_j} à valeurs dans le plan dynamique du polynôme P_α

On définit \mathcal{P}_j (respectivement \mathcal{P}'_j) par $\text{Re}(\Phi_j(z)) \in]0, a_{j+1} - k_1 - 1[$ (respectivement $]1, a_{j+1} - k_1[$), où a_j est le $j^{\text{ème}}$ coefficient de la fraction continue de α . alors, $f_j : \mathcal{P}_j \rightarrow \mathcal{P}'_j$ est un isomorphisme. Posons

$$\mathcal{Q}_j := \Psi_j(\mathcal{P}_j), \quad \mathcal{Q}'_j := \Psi_j(\mathcal{P}'_j), \quad D_j := V_{f_j}^{-k_0} \cup W_{f_j}^{-k_0}$$

$$D'_j := f_j^{a_{j+1}}(D_j), \quad C_j := \Psi_j(D_j) \quad \text{et} \quad C'_j := \Psi_j(D'_j).$$

Lemme 13

L'application Ψ_j conjugue $f_j : \mathcal{P}_j \rightarrow \mathcal{P}'_j$ à $P_\alpha^{q_j} : \mathcal{Q}_j \rightarrow \mathcal{Q}'_j$ et elle conjugue $f_j^{a_{j+1}} : D_j \rightarrow D'_j$ à $P_\alpha^{q_{j+1}} : C_j \rightarrow C'_j$.

Démonstration. Cette propriété est vraie près de 0 où les applications sont proches de rotations. Elle est donc vraie partout par prolongement analytique. \square



FIG. 3.8 – L'ouvert U_1 contient l'ensemble post-critique de P_θ . Si θ est de type constant, cet ensemble post-critique est le bord du disque de Siegel Δ_θ .

Lemme 14

L'ensemble post-critique de P_α est contenu dans

$$U_j := \bigcup_{k=0}^{q_{j+1} + \ell q_j} Q_\theta^k(C_j)$$

où $\ell := k_0 - k_1 - 3$.

Démonstration. Pour $n > j$, on peut itérer f_n au moins deux fois au point critique. Puisque f_n est une renormalisée de f_{j+1} , cela signifie que l'on peut itérer f_{j+1} plusieurs fois au point critique. Puisque n est arbitrairement grand, l'ensemble post-critique de f_{j+1} est infini.

Maintenant, si $z \in D_j$, si $z' = \varphi_j(z)$ et si $f_{j+1}(z')$ appartient au domaine de f_{j+1} , alors il existe $b \in \mathbb{Z}$, $b \leq \ell$ tel que $(f_j|_{\mathcal{P}_j})^b \circ (f_j^{a_{j+1}}|_{D_j})(z) \in D_j$.

Par conséquent, si l'orbite de z' sous itération de f_{j+1} est infinie, l'orbite de z sous itération de f_j est infinie, revient dans D_j une infinité de fois, deux passages consécutifs différent d'au plus $a_{j+1} + \ell$ coups. En particulier, c'est le cas si z est une préimage du point critique de f_j telle que z' est le point critique de f_{j+1} .

En utilisant le lemme 13 page précédente, on peut transférer ce résultat au plan dynamique de P_α . Il y a une préimage du point critique de p_α dont

l'orbite visite C_j une infinité de fois, deux passages consécutifs différent d'au plus $q_{j+1} + \ell q_j$ coups. \square

Pour chaque j , l'ensemble U_j dépend continument de α tant que les j premières réduites ne changent pas. Donc, étant donné $\alpha \in \mathcal{C}_N$ et $\delta > 0$, si n est suffisamment grand et si $\alpha' \in \mathcal{C}_N$ est suffisamment proche de α , l'ensemble $\overline{U}_j(\alpha')$ est contenu dans le δ -voisinage de $\overline{U}_j(\alpha)$.

Pour compléter la preuve du théorème 10 page 74, il suffit donc de montrer que pour tout $\alpha \in \mathcal{I}_N$, quand $j \rightarrow +\infty$, $\overline{U}_j \rightarrow \overline{\Delta}$ avec Δ le disque de Siegel de P_α .

Posons

$$D_j'' := f_j^{a_{j+1} + \ell}(D_j) \subset \mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}'_j \subset \mathcal{P}_{f_j} \quad \text{et} \quad C_j'' := \Psi_j(D_j).$$

D'après le lemme 13 page 78, $C_j'' = P_\alpha^{q_{j+1} + \ell q_j}(D_j)$. Montrons d'abord que C_j'' est contenue dans un petit voisinage de $\overline{\Delta}$ pour j grand. Les points de D_j'' qui sont image par Ψ_j de points dans le disque de Siegel Δ_{f_j} de f_j sont contenus dans le disque de Siegel Δ of P_α . Ils ne posent pas de problème. Les disques Δ_{f_j} contiennent tous un disque D_r dont le rayon ne dépend pas de j (c'est ici que nous utilisons l'hypothèse que α est de type constant). Donc, il existe un anneau contenu dans \mathcal{P}_{f_j} dont le module est borné inférieurement indépendamment de j et qui isole $D_j'' \setminus \Delta_{f_j}$. L'application Ψ_j est univalente sur \mathcal{P}_{f_j} . On peut donc appliquer le lemme de distortion de Koebe pour montrer que $C_j'' \setminus \Delta$ a un diamètre comparable à deux points du bord de Δ contenus dans C_j'' , qui sont envoyés le premier sur le second par $P_\alpha^{q_j}$.

Les points de $U_j \setminus \Delta$ sont des préimages de points de $C_j'' \setminus \Delta$ par des branches inverses de $P_\alpha^{o_k}$, $k \leq q_{j+1} + \ell q_j$. le nombre de valeurs critiques de $P_\alpha^{q_{j+1} + \ell q_j}$ dans $\psi_j(\mathcal{P}_{f_j})$ est égal au nombre de valeurs critiques de $f_j^{a_{j+1} + \ell}$ dans \mathcal{P}_{f_j} . Ce nombre est borné supérieurement par a_{j+1} et puisque α est de type constant, la borne ne dépend pas de j . Une variante du lemme de distortion de Koebe pour les revêtement ramifiés permet de conclure que les points de $U_j \setminus \Delta$ sont à une distance de Δ majorée par

$$M \cdot \sup_{z \in \partial \Delta} d(z, P_\alpha^{o_{q_j}}(z))$$

où M est une constante qui ne dépend pas de j . Ce supremum tend vers 0 quand j tend vers $+\infty$.

3.3 Ensembles de Julia d'aire strictement positive

Définition 2

L'ensemble de Julia rempli K_α du polynôme P_α est l'ensemble des points dont l'orbite est bornée. L'ensemble de Julia J_α est le bord de K_α .

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'ensemble de Julia J_α est un compact d'intérieur vide. Dans de nombreux cas, on sait conclure que l'aire de J_α (c'est-à-dire sa mesure de Lebesgue) est nulle. Notamment,

- si P_α a un cycle périodique attractif, ce qui couvre le cas où $\text{Im}(\alpha) > 0$;
- si P_α a un cycle parabolique (d'après Adrien Douady et John H. Hubbard), ce qui couvre le cas où $\alpha \in \mathbb{Q}$;
- si P_α n'est pas infiniment renormalisable (d'après Misha Lyubich et Mitsuhiro Shishikura) ;
- si $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}$ avec $\log a_n = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ (d'après Carsten L.

Petersen et Saeed Zakeri), ce qui est vrai pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Récemment, avec Arnaud Chéritat, nous avons complété un programme initié par Adrien Douady. Nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 15

Il existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que P_α est non linéarisable et $\text{aire}(J_\alpha) > 0$.

La preuve est basée sur

- des résultats de Curtis T. McMullen [McM] qui montre que lorsque α est de type constant, les points du bord du disque de Siegel Δ_α sont des points de densité pour la mesure de Lebesgue de K_α ;
- les résultats obtenus dans les deux parties précédentes.

3.3.1 Principe de la démonstration

Donnons-nous une suite (ε_n) de réels $\in]0,1[$ tels que $\prod(1 - \varepsilon_n) > 0$. Nous allons alors trouver une suite de (α_n) telle que

- α_{n+1} est arbitrairement proche de α_n ,
- α_n est un nombre de type constant (et donc P_{α_n} a un disque de Siegel),
- P_{α_n} a un cycle contenu dans $D(0,1/n) \setminus \{0\}$ et

- $\text{aire}(K_{\alpha_{n+1}}) \geq (1 - \varepsilon_n)\text{aire}(K_{\alpha_n})$.

En choisissant α_{n+1} suffisamment proche de α_n à chaque étape, on garantit que

- la suite (α_n) est une suite de Cauchy qui converge vers une limite α et
- pour tout $n \geq 1$, P_{α} a un cycle dans $D(0,1/n) \setminus \{0\}$.

Par conséquent, le polynôme P_{α} a des petits cycles, et donc n'est pas linéarisable. On a alors $J_{\alpha} = K_{\alpha} = \lim K_{\alpha_n}$ et donc

$$\text{aire}(J_{\alpha}) = \text{aire}(K_{\alpha}) \geq \text{aire}(K_{\alpha_0}) \cdot \prod (1 - \varepsilon_n) > 0.$$

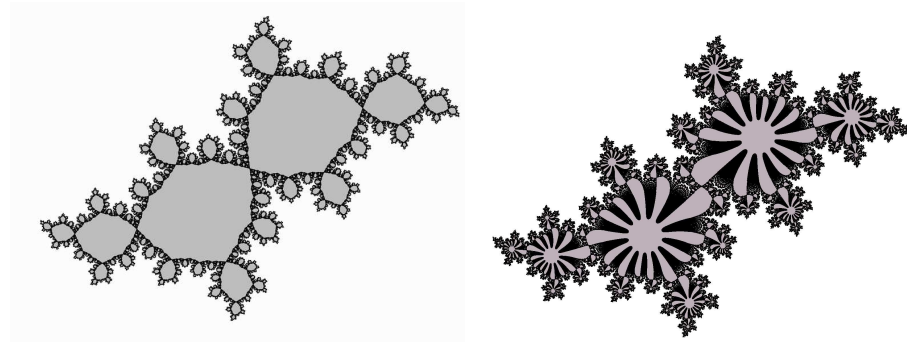


FIG. 3.9 – Deux ensembles de Julia remplis K_{α_0} et K_{α_1} . L'aire de K_{α_1} est proche de l'aire de K_{α_0} .

Pour construire une telle suite, il nous suffit de montrer la proposition suivante.

Proposition 16

Si N est suffisamment grand, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_N$, et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha_1 \in \mathcal{S}_N$ tel que

- $|\alpha_1 - \alpha| < \varepsilon$,
- P_{α_1} a un cycle dans $D_{\varepsilon} \setminus \{0\}$ et
- $\text{aire}(K_{\alpha_1}) \geq (1 - \varepsilon)\text{aire}(K_{\alpha})$.

Étant donné $\alpha := [a_0, a_1, \dots] \in \mathcal{S}_N$, si l'on considère une suite $\theta_n \in \mathcal{S}_N \rightarrow \alpha$ définie par

$$\theta_n := [a_0, a_1, \dots, a_n, A_n, N, N, N, \dots] \quad (3.2)$$

avec $\sqrt[n]{A_n} \rightarrow +\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, si n est suffisamment grand, P_{θ_n} a un cycle dans $D_{\varepsilon} \setminus \{0\}$. De plus, le théorème 1 page 65 implique que

$$\liminf \text{aire}(K_{\theta_n}) \geq \frac{1}{2}\text{aire}(K_{\alpha}).$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha_1 \in \mathcal{S}_N$ tel que $|\alpha_1 - \alpha| < \varepsilon$, P_{α_1} a un cycle dans $D_\varepsilon \setminus \{0\}$ et de sorte que

$$\text{aire}(K_{\alpha_1}) > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \text{aire}(K_\alpha).$$

Tout le problème réside dans notre capacité à promouvoir le coefficient $1/2 - \varepsilon$ en coefficient $1 - \varepsilon$.

3.3.2 Promotion

On note K (resp. K_n) l'ensemble de Julia rempli de P_α (resp. P_{θ_n} et Δ (resp. Δ_n) son disque de Siegel. Pour $\delta > 0$, on pose

$$\begin{aligned} V(\delta) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \partial\Delta) \leq \delta\}, \\ K(\delta) &:= \{z \in V(\delta) \mid (\forall k \geq 0) P_\alpha^{\circ k}(z) \in V(\delta)\} \quad \text{et} \\ K_n(\delta) &:= \{z \in V(\delta) \mid (\forall k \geq 0) P_{\theta_n}^{\circ k}(z) \in V(\delta)\}. \end{aligned}$$

Ces ensembles sont des compacts de \mathbb{C} .

Proposition 17

Pour tout ouvert $U \subset \Delta$ et tout $\delta > 0$,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_U(K_n(\delta)) \geq \frac{1}{2}.$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 1 page 65.

Proposition 18

Pour tout $\delta > 0$, si n est suffisamment grand, l'ensemble post-critique de P_{θ_n} est contenu dans $V(\delta)$.

C'est une conséquence immédiate du théorème 10 page 74 puisque θ_n est un nombre de type constant et que dans ce cas, l'adhérence de l'ensemble post-critique est égale au bord du disque de Siegel.

Proposition 19

Pour tout $\eta > 0$ et tout $\delta > 0$, il existe $\delta'_0 > 0$ tel que si $\delta' < \delta'_0$ et si $z \in V(8\delta') \setminus V(2\delta')$, alors

$$\text{dens}_{D(z, \delta')} (K(\delta)) > 1 - \eta.$$

C'est un corollaire du théorème suivant de Curtis T. McMullen.

Théorème 20 (McMullen)

Si α est un nombre de type constant et si $\delta > 0$, alors, tout point $z \in \partial\Delta$ est un point de densité de Lebesgue de l'ensemble des points dont l'orbite par P_α reste à distance inférieure à δ de Δ .

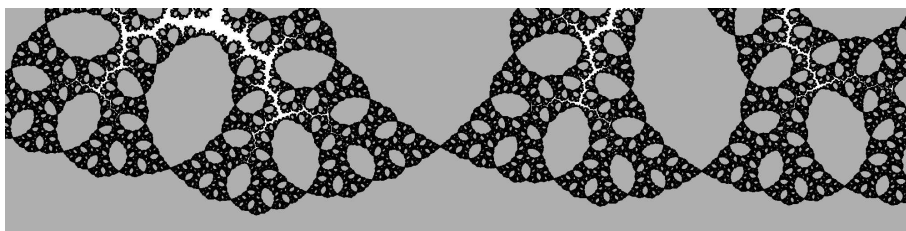


FIG. 3.10 – Si $\theta := (\sqrt{5} - 1)/2$, tout point du bord du disque de Siegel de P_θ est un point de densité de Lebesgue de K_θ .

Venons-en enfin à la proposition clé.

Proposition 21

Pour tout $\delta > 0$, $\text{dens}_\Delta(K_n(\delta)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Démonstration. Définissons $\rho_n :]0, +\infty[\rightarrow [0,1]$ par :

$$\rho_n(\delta) := \text{dens}_\Delta(\mathbb{C} \setminus K_n(\delta)).$$

Nous souhaitons montrer que

$$(\forall \delta > 0) \quad \rho_n(\delta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Nous allons pour cela montrer que :

$$(\exists \lambda < 1) (\forall c > 0) (\forall \delta > 0) \exists (\delta' > 0) (\exists n_0) (\forall n \geq n_0) \quad \rho_n(\delta) < \lambda \rho_n(\delta') + c.$$

On en déduit que

$$(\exists \lambda < 1) (\forall c > 0) (\forall \delta > 0) (\forall k \geq 1) (\exists n_0) (\forall n \geq n_0) \quad \rho_n(\delta) < \lambda^k + \frac{c}{1 - \lambda}.$$

Le résultat en découle aisément.

Étape 1. D'après le théorème de distortion de Koebe, il existe une constante κ telle que pour toute application $\varphi : D := D(a,r) \rightarrow \mathbb{C}$ qui se prolonge de manière univalente à $D(a,3r/2)$, on a

$$\sup_D |\varphi'| \leq \kappa \inf_D |\varphi'|.$$

On choisit $\eta > 0$ tel que

$$\lambda := \frac{2}{3} + \frac{1}{3}8\pi\kappa^4\eta < 1.$$

Étant donné $c > 0$, on choisit $\gamma > 0$ de sorte que

$$\text{aire}(V(\gamma) \setminus \Delta) < c \cdot \text{aire}(\Delta).$$

Étape 2. Fixons $\delta > 0$. D'après la proposition 19 page 83, il existe $\delta' > 0$, tel que $2\delta' < \delta$ et

$$z \in V(8\delta') \setminus V(2\delta') \implies \text{dens}_{D(z, \delta')}(\mathbb{C} \setminus K(\delta)) < \eta.$$

Posons

$$W := V(8\delta') \setminus V(2\delta').$$

Quitte à diminuer la valeur de δ' , pour n suffisamment grand, l'orbite d'un point $z \in \Delta$ sous itération de P_{θ_n} ne peut pas sortir de $V(2\delta')$ sans passer dans W . En effet, si δ' est suffisamment petit, $|P'_\alpha| < 4$ sur $\overline{V}(2\delta')$ et comme $P_\alpha(\overline{\Delta}) = \overline{\Delta}$, on a

$$P_\alpha(V(2\delta')) \Subset V(8\delta').$$

Cette inclusion reste vraie pour θ_n suffisamment proche de α . On pose

$$X_n := \{z \in \Delta \mid (\exists k) P_{\theta_n}^{\circ k}(z) \in W\}.$$

Pour n suffisamment grand, on a donc

$$\mathbb{C} \setminus K_n(\delta) \subset X_n \subset \mathbb{C} \setminus K_n(\delta').$$

Étape 3. D'après la proposition 18 page 83, pour n suffisamment grand, l'ensemble post-critique de P_{θ_n} est contenu dans $V(\delta'/2)$. Dans ce cas, si $z \in X_n$ et si $z_k := P_{\theta_n}^{\circ k}(z) \in W$, il existe une application univalente $\varphi : D := D(z_k, \delta') \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- φ est la branche inverse de $P_{\theta_n}^{\circ k}$ qui envoie z_k sur z et
- φ se prolonge à $D(z_k, 3\delta'/2)$ de manière univalente.

Notons que $\varphi(D) \subset \mathbb{C} \setminus K_n(\delta')$. Comme

$$\sup_{z \in \Delta} d(z, K_n(\delta')) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

si n est suffisamment grand,

$$\varphi(D) \subset V(\gamma) \setminus K_n(\delta').$$

Enfin,

$$\sup_D |\varphi'| \leq \kappa \inf_D |\varphi'|.$$

Étape 4. Posons

$$Y^\ell := \{z \in K(\delta) \mid (\exists k \leq \ell) P_\alpha^{\circ k}(z) \in \Delta\}$$

et

$$Y_n^\ell := \{z \in K_n(\delta) \mid (\exists k \leq \ell) P_{\theta_n}^{\circ k}(z) \in \Delta\}.$$

On choisit ℓ suffisamment grand pour que

$$(\forall z \in W) \quad \text{dens}_{D(z, \delta')}(\mathbb{C} \setminus Y^\ell) < \eta.$$

Si n est suffisamment grand, on a alors

$$(\forall z \in W) \quad \text{dens}_{D(z, \delta')}(\mathbb{C} \setminus Y_n^\ell) < \eta.$$

Alors, pour tout $z \in X_n$ tel que $z_k := P_{\theta_n}^{\circ k}(z) \in W$, il existe un disque $D_z := D(z, r) \subset V(\gamma) \setminus K_n(\delta')$ et

$$\text{dens}_{D_z}(\mathbb{C} \setminus P_{\theta_n}^{-k}(Y_n^\ell)) < \kappa^4 \eta.$$

Étape 5. Nous allons utiliser la notation $m|_X$ pour la mesure de Lebesgue sur X , prolongée par 0 en dehors de X . D'après la proposition 17 page 83, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} m|_{K_n(\delta)} \geq \frac{1}{2} m|_\Delta$$

pour la convergence faible sur les mesures. On en déduit que pour tout ℓ ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} m|_{K_n(\delta)} \geq \frac{1}{2} m|_{Y_n^\ell}.$$

Par conséquent, pour tout $z \in W(\delta')$, si n est suffisamment grand, on a

•

$$\text{dens}_{D(z, \delta')} (K_n(\delta)) > \frac{1}{3} \text{dens}_{D(z, \delta')} (Y_n^\ell),$$

- pour toute application univalente $\varphi : D(z, \delta') \rightarrow \mathbb{C}$ d'image $U := \varphi(D(z, \delta'))$ qui se prolonge de manière univalente à $D(z, 3\delta'/2)$,

$$\text{dens}_U (\varphi(K_n(\delta))) > \frac{1}{3} \text{dens}_U (\varphi(Y_n^\ell)),$$

- pour le plus grand disque $D := D(\varphi(z), r) \subset U$,
$$\text{dens}_D(\varphi(K_n(\delta))) > \frac{1}{3} \text{dens}_D(\varphi(Y_n^\ell)) \quad \text{et}$$
- pour tout carré $Q \subset D$ de côté supérieur à $r/2\sqrt{2}$,
$$\text{dens}_Q(\varphi(K_n(\delta))) > \frac{1}{3} \text{dens}_Q(\varphi(Y_n^\ell)).$$

Étape 6. On appelle carré douadique un carré de la forme

$$\left[\frac{p}{2^r}, \frac{p+1}{2^r} \right] + i \left[\frac{q}{2^r}, \frac{q+1}{2^r} \right]$$

avec $p, q, r \in \mathbb{Z}$. Pour tout $r > 0$, le plus grand carré douadique contenant z et contenu dans le disque $D(z, r)$ a un côté de longueur supérieure à $r/2\sqrt{2}$. On voit donc que pour tout $z \in X_n$ tel que $z_k := P_{\theta_n}^{\circ k}(z) \in W$, il existe un carré douadique Q_z qui contient z , qui est contenu dans $V(\gamma) \setminus K_n(\delta')$, tel que

$$\text{dens}_{Q_z}(\mathbb{C} \setminus P_{\theta_n}^{-k}(Y_n^\ell)) < 8\pi\kappa^4\eta$$

et

$$\text{dens}_{Q_z}(K_n(\delta)) > \frac{1}{3} \text{dens}_{Q_z}(P_{\theta_n}^{-k}(Y_n^\ell)) > \frac{1}{3}(1 - 8\pi\kappa^4\eta).$$

Cela implique que

$$\text{dens}_{Q_z}(\mathbb{C} \setminus K_n(\delta)) < \frac{2}{3} + \frac{1}{3}8\pi\kappa^4\eta = \lambda < 1.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \text{aire}(\Delta \setminus K_n(\delta)) &< \lambda \cdot \text{aire} \bigcup_{z \in X_n} Q_z \\ &< \lambda \cdot \text{aire}(V(\gamma) \setminus K_n(\delta')) \\ &< \lambda \cdot \text{aire}(\Delta \setminus K_n(\delta')) + \text{aire}(V(\gamma) \setminus \Delta) \\ &< \lambda \cdot \text{aire}(\Delta \setminus K_n(\delta')) + c \cdot \text{aire}(\Delta). \end{aligned}$$

On vient de montrer que pour n suffisamment grand,

$$\text{dens}_\Delta(\mathbb{C} \setminus K_n(\delta)) < \lambda \cdot \text{dens}_\Delta(\mathbb{C} \setminus K_n(\delta')) + c.$$

□

On a donc

$$\text{aire}(\Delta_\alpha \cap K_{\theta_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{aire}(\Delta_\alpha) \quad \text{et} \quad \text{aire}(K_{\theta_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{aire}(K_\alpha).$$

Cela achève la démonstration de l'existence de polynômes quadratiques ayant un point de Cremer et un ensemble de Julia d'aire strictement positive.

Chapitre 4

Perspectives

4.1 Conjugaisons \mathcal{C}^∞

Avec Artur Avila, nous étudions à quel point il est possible de généraliser le résultat concernant les disques de Siegel à bord \mathcal{C}^∞ . Nous pensons pouvoir montrer le résultat suivant.

Conjecture 1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point. Soit

$$\{f_\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}\}_{\alpha \in I},$$

une famille analytique d'applications holomorphes telles que $f_\alpha(0) = 0$ et $f'_\alpha(0) = e^{2i\pi\alpha}$. Supposons que l'ensemble des paramètres $\alpha \in I$ pour lesquels f_α n'est pas linéarisable est dense. Alors, il existe un ensemble non dénombrable $\mathcal{S} \subset I$ tel que pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$, f_α a un disque de Siegel relativement compact dans \mathbb{D} dont le bord est une courbe de Jordan \mathcal{C}^∞ .

Avec Arnaud Chéritat [BC4], nous avons montré que l'on peut contrôler la régularité du bord des disques de Siegel de manière très fine. En particulier, nous avons montré le théorème suivant.

Théorème 1

Pour tout $k \geq 0$, il existe des polynômes quadratiques ayant un disque de Siegel dont le bord est une courbe de Jordan de classe \mathcal{C}^k mais pas de classe \mathcal{C}^{k+1} .

Il existe une analogie très forte entre les difféomorphismes analytiques du cercle et les germes de fonctions holomorphes qui fixent un point avec dérivée

de module 1. Avec Artur Avila, nous avons observé qu'une démonstration similaire à celle exposée dans le premier chapitre permet de montrer le résultat suivant.

Théorème 2

Il existe des fractions rationnelles de degré 3 dont la restriction au cercle unité est conjuguée à une rotation irrationnelle, la conjugaison étant de classe \mathcal{C}^∞ mais pas \mathbb{R} -analytique.

Avec Nuria Fagella, Lukas Geyer et Christian Henriksen [BFGH], nous avons montré que dans la famille des fractions rationnelles

$$f_{\lambda,a} : z \mapsto \lambda z^2 \frac{az + 1}{z + a} \quad (\lambda, a) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

l'ensemble des paramètres (λ, a) pour lesquels $f_{\lambda,a}$ a un anneau de Herman fixe de nombre de rotation $\alpha \in \mathcal{B}$ est l'image de \mathbb{D} par une application injective qui envoie 0 sur $(e^{2i\pi\alpha}, 0)$. Nous appelons cet ensemble le disque d'Arnold \mathcal{D}_α . Nous étudions actuellement le résultat suivant.

Conjecture 2

Il existe un ensemble non dénombrable $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ tel que pour tout $\alpha \in \mathcal{B}$,

- le bord du disque d'Arnold \mathcal{D}_α est une courbe de Jordan de classe \mathcal{C}^∞ ,
- pour tout $(\lambda, a) \in \mathcal{D}_\alpha \setminus \{(e^{2i\pi\alpha}, 0)\}$, l'application $f_{\lambda,a}$ a un anneau de Herman dont le bord est la réunion de deux courbes de Jordan de classe \mathcal{C}^∞ ,
- pour tout $(\lambda, a) \in \partial\mathcal{D}_\alpha$, $f_{\lambda,a}$ fixe une courbe de Jordan $\gamma_{\lambda,a}$ de classe \mathcal{C}^∞ et y est conjuguée à la rotation d'angle α par une application de classe \mathcal{C}^∞ et
- l'ensemble des paramètres $(\lambda, a, z) \in \mathbb{C}^3$ tels que $(\lambda, a) \in \partial\mathcal{D}_\alpha$ et $z \in \gamma_{\lambda,a}$ est un tore \mathcal{C}^∞ .

4.2 Rayon conforme des disques de Siegel

Dans le premier chapitre, nous avons montré que pour toute application $f \in \mathcal{S}_\alpha$, on a

$$r(f) \geq \frac{1}{20} r(P_\alpha)$$

où P_α est le polynôme quadratique $z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z(1+z)$. Avec Arnaud Chéritat, nous étudions des généralisations possibles de ce résultat (en suivant des idées de Lukas Geyer et de Ricardo Pérez-Marco).

Par exemple, considérons le polynôme cubique

$$Q_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z(1 - z + z^2/3)$$

qui fixe 0 avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$ et qui a un point critique double en $z = 1$. Lukas Geyer a montré que Q_α est linéarisable si, et seulement si, P_α est linéarisable, donc si, et seulement si, $\alpha \in \mathcal{B}$ est un nombre de Brjuno. Nous pensons savoir montrer que la fonction

$$\alpha \in \mathcal{B} \mapsto \log r(Q_\alpha) - \log r(P_\alpha)$$

est bornée. La démonstration ne repose pas sur l'utilisation des propriétés arithmétiques fines de α .

Conjecture 3

La fonction $\alpha \in \mathcal{B} \mapsto \log r(Q_\alpha) - \log r(P_\alpha)$ est uniformément continue.

Conjecture 4

La fonction $\alpha \in \mathcal{B} \mapsto \log r(Q_\alpha) - \log r(P_\alpha)$ est Hölderienne d'exposant $1/2$.

Considérons le polynôme cubique impair

$$S_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z(1 + z^2).$$

Il est facile de voir que ce polynôme est semi-conjugué via $z \mapsto z^2$ à

$$T_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi 2\alpha}z(1 + z)^2.$$

Le polynôme T_α n'a qu'un seul point critique "libre", l'image de l'autre étant fixe en 0. Avec Arnaud Chéritat, nous pensons savoir démontrer que la fonction

$$\alpha \in \mathcal{B} \mapsto \log r(T_\alpha) - \log r(P_\alpha)$$

est bornée et nous pensons que les techniques du deuxième chapitre s'appliquent pour montrer que cette fonction est uniformément continue. On en déduirait que les fonctions

$$\alpha \in \mathcal{B} \mapsto \log r(S_\alpha) - \frac{1}{2} \log r(P_{2\alpha}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathcal{B} \mapsto \log r(S_\alpha) - \frac{1}{2} \Phi(2\alpha)$$

sont bornées et uniformément continues. En particulier, la fonction

$$\alpha \mapsto \log r(S_\alpha) + \Phi(\alpha)$$

ne serait bornée sur aucun intervalle de \mathbb{R} . Cependant, il existerait une constante C telle que

$$(\forall \alpha \in \mathcal{B}) \quad -\Phi(\alpha) - C \leq \log r(S_\alpha) \leq -\frac{1}{2}\Phi(\alpha) + C.$$

Conjecture 5

Pour tout $d \geq 2$ il existe une constante C telle que si P est un polynôme de degré d qui fixe 0 avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$-\Phi(\alpha) - C \leq \log r(P) - \log \min_{P'(\omega)=0} |\omega| \leq -\frac{1}{d-1}\Phi(\alpha) + C.$$

Enfin, Arnaud Chéritat et moi pensons savoir démontrer le résultat suivant. La démonstration est en cours de rédaction.

Théorème 3

Pour tout réel $\delta > 1/2$ et tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide, la fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(P_\alpha)$ n'est pas Hölderienne d'exposant δ et n'est pas à variation bornée sur I .

4.3 Ensembles de Julia d'aire strictement positive

Avec Arnaud Chéritat, nous pensons que les techniques présentées dans le troisième chapitre permettent de montrer les résultats suivants. Les démonstrations sont en cours de rédaction.

Théorème 4

Il existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que P_α est linéarisable et $\text{aire}(J_\alpha) > 0$.

Théorème 5

Il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que P_α est infiniment renormalisable et $\text{aire}(J_\alpha) > 0$.

John H. Hubbard a posé les deux questions suivantes.

Question 1

Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lequel l'aire de l'ensemble de Julia rempli K_α est nulle?

Question 2

Existe-t-il $c > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{aire}(K_\alpha) > c$?

Bibliographie

- [A] L. V. AHLFORS, *Complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [ABC] A. AVILA, X. BUFF, A. CHÉRITAT, *Siegel disks with smooth boundaries*, *Acta Mathematica* (2004) 193, 1–30.
- [Brj] A.D. BRJUNO, *Analytic forms of differential equations*, *Trans. Mosc. Math. Soc.* **25** (1971).
- [BC1] X. BUFF & A. CHÉRITAT, *Upper Bound for the Size of Quadratic Siegel Disks*, *Inventiones Mathematicae* (2004) 156/1, 1–24.
- [BC2] X. BUFF & A. CHÉRITAT, *The Brjuno function continuously approximates the size of quadratic Siegel disks*, à paraître aux *Annals of Math.*
- [BC3] X. BUFF & A. CHÉRITAT, *Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive*, *Comptes Rendus Mathématiques* (2005) 341/11, 669–674.
- [BC4] X. BUFF & A. CHÉRITAT, *How regular can the boundary of a quadratic Siegel disk be?*, à paraître aux *Proc. of the A.M.S.*
- [BFGH] X. BUFF, N. FAGELLA, C. HENRIKSEN & L. GEYER, *Herman Rings and Arnold Disks*, à paraître aux *Proc. of the A.M.S.*
- [C] A. CHÉRITAT, *Recherche d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue positive*, Thèse, Orsay (2001).
- [D] A. DOUADY, *Disques de Siegel et anneaux de Herman*, *Séminaire Bourbaki* **677**, 39^e année, 1986/87.
- [G] L. GEYER, *Smooth Siegel discs without number theory: A remark on a proof by Buff and Chéritat*, preprint (2003).
- [J1] H. JELLOULI, *Sur la densité intrinsèque pour la mesure de Lebesgue et quelques problèmes de dynamique holomorphe*, Thèse, Université Paris-Sud, Orsay, (1994).
- [J2] H. JELLOULI, *Perturbation d'une fonction linéarisable*, , London Math. Soc. Lect. Note **274**, Ed. Tan Lei, Cambridge Univ. Press (2000), 227-252.
- [Ma] S. MARMI, *Critical Functions for Complex Analytic Maps*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (1990), 3447–3474

- [MMY] S. MARMI, P. MOUSSA & J-C. YOCCOZ, *The Brjuno functions and their regularity properties*, Comm. Math. Phys. **186** (1997), 265–293.
- [McM] C.T. MCMULLEN, *Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets*, Acta Math., **180** (1998), 247–292.
- [PM] R. PÉREZ-MARCO, *Siegel disks with smooth boundary*, Preprint.
- [Sh] M. SHISHIKURA, *Parabolic renormalization, a preliminary note*, manuscript.
- [Si] C.L. SIEGEL, *Iteration of analytic functions*, Ann. of Math. **vol 43** (1942).
- [Y] J.C. YOCCOZ, *Petits diviseurs en dimension 1*, S.M.F., Astérisque **231** (1995).